G.M.ザスラフスキー

カオス —古典および量子力学系—

三島信彦　斉藤徹也　新藤　茂　訳

現代工学社

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ
СТОХАСТИЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
© МОСКВА НАУКА 1984

日本語版への序文

創成期の量子論は，神秘的な自然法則に対する深遠な洞察をうながしただけでなく，物質組成に関する説明や記述法についてそれまでとは本質的に異なる考え方を提示した．予言可能な決定論的世界はペレストロイカ（手直し）の試練をくぐらざるをえなかった．ボルツマンの論文以後，偶然性や予言不可能性がふたたび物理学の領域にに入り込んできた．物理学の考え方はそれまでとは異なり，因果律，一致の法則，物質不滅の法則といった多くの基本概念を再検討して，ミクロ世界についての新しい理解に適応できるようにしなければならなくなった．物理学における新しい哲学は量子論のみに関わるのではない．それは，古典物理学の分野，数学，天体物理学，生物学そして哲学の多くの分野に対してきわめて大きな影響を及ぼした．

現在，物理学には新しい変化の波がうちよせているが，それは力学系のカオス現象の発見によってもたらされ，いまや物理学の全領域に及んでいる．しかも，数学領域へのカオス理論の侵透はより深く，より広範にわたっている．カオス理論は年々，ますます新しい領域を占めつつあり，今ではそれを無視しては生物学も，医学も，経済学も，社会学も，成り立たなくなっている．しかしながら，もしかすると新しい科学現象の最も興味ある特徴は，決定論への回帰にあるのかもしれない．カオスは予言可能である．カオスは，従来考えられていたように，規則正しい現象のみに用いた方程式と同一の方程式によって記述できるようになった．つまり，われわれは，偶然的な現象と必然的な現象を同一の方程式によって記述する新しい型の統一理論の戸口に知らぬ間に立たされていたのである．

今日，コンピュータの能力は新しい理論を創造するうえできわめて大きな役割を果たしている．われわれはコンピュータの助けをかりて，直接実験では不可能な場合にも，カオスの研究を組織的に行なうことができるようになった．力学系のカオス理論がこれからどれ程発達し，またどのような方向に向かって進むかは予測困難であるが，すでに現在，コンピュータの影響力は，理論と技術の新たな可能性をみきわめるうえできわめて大きいといわなければならない．

本書はカオス理論について書かれた本格的な書物の１つである．この本の出版以降も，新しい発見や新しい成果が現われている．それは，自動制御，マルチフ

ラクタル，ストカティック網目構造といった概念に関するものである．本書は主としてハミルトン系について考察しており，その大半は非線型波動および量子力学におけるカオス問題の論究に当てられている．この方面の研究は若干複雑であるが，今日なお未解決の分野として重要である．さらに，われわは，量子論の視点から古典力学系のカオスが何を意味するかを理解しなければならない．本書は量子力学における 2, 3 の新しいパラドクスに言及しているが，それらのパラドックスは力学的カオスによって生じるものであり，従って，われわれとしては，アインシュタインの論文で再三論じられた量子論の周知の問題に再び立ち戻らざるをえない．

本書が日本語に翻訳されて，多くの日本人読者に入手し易いものになるという知らせは，著者にとって大きな朗報である．本書の翻訳の労をとられた訳者の方々に衷心より感謝申し上げる．

G.M. ザスラフスキー

序　文

統計力学は物理学の中でも特別な位置を占めている．統計物理学は，その比較的短い歴史のなかでボルツマンによる定式化以降は劇的な事件があまりみられなかった分野である．しかしそれでも，統計物理学は他の分野に常に新しい進歩をもたらしている．これらのことは，これまでの概念の変更というような劇的な出来事が新粒子の発見や物理学の新しい基本法則の導入に結びついていたことを考えると，むしろ驚くべきことである．事実，統計物理学における出来事はみな同じ舞台でおこり，そこでの役者は任意の相互作用の任意の粒子でよかったのである．しかし，統計力学の基本的問題は以前と同様に現在でも多くの議論と研究の対象になっており，逆説的に思われるかもしれないが，このことがまた，統計力学が多方面に応用される理由にもなっている．その基本的問題というのは，力学系がどのようにして種々のストカスティックな記述に役たつようなカオス（またはストカスティックな）状態になるのかという問題である．この問題の様々な側面について多くの著書が部分的な解答を提案しているが（参考文献〔1〕～〔12〕をみよ），その数の多いこととその内容が多岐にわたっていること自体がそれぞれに難点のあることを物語っている．そのうえ，その難点も明確な理論形式について表現できるとは限らないのである．

最近の20年間で，カオスとその時間発展に関する理解が深まり，新しい舞台が開かれた．その基礎づけは多くの論文によってなされた．とくにホップ（E. Hopf）とクリロフ（N.S. Krylov）の研究に負うところが大きい．一方で力学系の安定性の条件（いわゆる Kolmogolov-Arnold-Moser 定理）に関する研究と，もう一方で，力学系の強い不安定性を表わす力学的エントロピー（いわゆるKエントロピーまたはコルモゴロフ　エントロピー）の導入に関する研究に続いて“爆発的な”発展が，コルモゴロフ（A.N. Kolmogorov）によって，もたらされた．これらの革新的研究が我々の基本的な考え方に如何に変革をもたらしたかは，つぎのように説明すればよく理解できよう．

まず，統計力学の法則が支配的である領域については1つの伝統的な考え方があった．それは系が非常に多くの粒子から構成されていなければならないということであった．ところが，現在では，かなり複雑な相互作用をしている多数の粒

子からなる系であってもカオス的な状態が現われるとは限らないこと（たとえば，戸田格子），また，逆にたった2個の振動子の系でもそれらが非線型的に結合していると，カオス的な状態が現われる可能性のあることが知られている．

この新しい現象はしばしばストカスティックな運動と呼ばれ，次のような状況にあたる．ある種の力学系は特殊な不安定性をもつことができ，このために，系の様々な力学的特性が時間的に乱雑な変動をすることがある．この乱雑性（ストカスティシティ）は，ある先験的に与えられた乱雑な力によるのではなく，系の内的性質そのものによって発生するのである．この事実を利用すると，乱雑な事象を発生する機構，たとえば，理想的なルーレットを設計することができ，そのうえ，その理由を説明することも可能になるのである．

最も大事な点は，カオスがある条件のもとで発生するという事実にあるのではなく，むしろ，カオスが一般的な系に対して典型的な運動となる範囲の広さにある．カオスが現われたという報告とそれを説明する論文の数は現在では膨大なものである．カオス的な（系の内的性質としての）運動は，いつでもまたほとんど到るところに現われるのである．もしも，カオス的な運動がある時間見られなかったとすれば，それは，極めて範囲のせまいパラメーターに対応する運動であるためか，または，カオス的な運動がおこるまでにもっと長い時間が必要であるためか，さもなければ，より支配的な運動によってカオス的な運動が隠されているためかのいずれかによるものである．

ストカスティシティが応用される分野は極めて広いことが明らかにされつつある．その範囲は，古典論と量子論の両者を含めて，近代物理学の全ての基礎的分野にわたっている．また，それによって，これまで何かアカデミックな問題とみなされてきた統計力学の基礎づけの問題に関しても，これまでとは異質の新しい見方が与えられるのである．

この本は，ストカスティシティの現われる現象およびそれを分析する方法，さらにはそれの様々な物理学的問題への応用を概説するために書かれたものである．ストカスティシティに関する初期の総合報告が刊行された後も（参考文献〔13〕～〔15〕を参照）新しい重要な結果が得られ，また，応用範囲も相当に広がっている．この本はそれらの単なる総合報告ではなく，この本で論じることがらは，著者の以前の著書〔13〕と4つの総合報告〔14, 16, 17, 18〕およびいろいろな機会に行なった講演を基礎にしてとりまとめたものである．

この本の構成はつぎの通りである．

第1章は補助的な章であって，以降の各章で本質的な意味をもつ力学の基本的性質とエルゴード理論の要約が述べられる．

第2章では，ストカスティシティの基準という概念が導入される．また，系の性質が統計的に分析できるような簡単なモデルを取り扱かって，ストカスティシティの基準を具体的に定式化する．

第3章においては，複雑な系の特性をもち，かつ，比較的簡単な方法で分析できる教育的な例（フェルミ加速の例）を議論する．このフェルミのストカスティックな加速機構の応用面も重要である．

第4章は，非線型振動におけるストカスティシティの発生機構の分析にあてられる．

第5章は原理的な立場から最も重要な章の1つである．ここでは，ストカスティックな層の形成の理論を展開し，力学的ハミルトニアン系でのストカスティシティの一般的発生形態について概説する．

第6章も同じく大切な章である．ここでは，ストカスティシティが内的運動によって発生する系の運動論的記述を構築する．そして，運動論的方程式を導く際，このような系の特殊性のために，乱雑位相近似などの先験的仮定が不要になることが示される．

第7章では，第6章と類似の方法で，弱い非線型性をもつ波動場がストカスティックになる条件を求める．

第8章において，周期的な非線型波動場という新しい対象が取り扱われる．この波動場のなかの摂動によってひきおこされる不安定性とカオスを分析する方法が開発される．

これらに続く後の4つの章では，量子系が取り扱われる．

まず，第9章と第10章では，量子系の安定性を批判的に分析し，そして，問題の定式化，量子系でのストカスティシティの考え方，および，非定常的な量子系がストカスティックになるときの特殊事情について論じる．

第11章は第6章に対応する量子論の章である．この章の目的は，内部運動がカオスをひきおこすという条件のもとで，量子系の運動論的方程式を導くことである．

第12章では，古典的極限で“内的”カオスを示す量子系のエネルギースペクトルのストカスティックな性格を分析することに焦点をあてる．ここでは，また，量子数が“消滅した”ときの系の様々な性質を議論する．

このように，第9章から第12章までは，古典的極限ではストカスティックにな

る系の量子化の問題（こうして量子化された系をこの本では量子論的K系と呼ぶ）にあてられるといってよい.

この本の全般にわたって，“ストカスティシティ”という言葉は次のような場合に限って使用することにする．それは，系の乱雑運動が，外からの乱雑な力によるのではなく，系の内的特性によってのみひきおこされる場合（古典的な議論のとき，このような系はK系と呼ばれる）である.

全ての章に，議論と関連する数学的処方，物理的な例および数値計算の例を盛り込むようにした.

また，最後に幾つかの付録を加えてあるが，これに，本文中に使われている系とか方法そしてストカスティシティの理論の応用についてさらに詳しく説明するためのものである.

著者は幸にも，R.Z. Sagdeev 氏および B.V. Chirikov 氏といっしょにストカスティシティに関する研究を始めることができた．この幸運な機会が出発点となってその後もこの問題に関心をもち続けている．具体的に言うと，著者の初期の研究は，クルチャトフ原子力エネルギー研究所にあって M.A. Leontovich 氏のゼミナールで彼と詳細に議論したものである．このときの議論は後の大部分の仕事に深く影響することになった．また，興味ある様々な側面について V.I. Arnold 氏，I.M. Lifshits 氏ならびに Ya. G. Sinai 氏と議論することができた．この本の量子系のストカスティシティに関する部分（第9章から第11章まで）は G.P. Berman 氏との共同研究に依るものである．このほか，P.I. Belobrov, A.M. Iomin, A.R. Kolovsky, Kh. -R. Ya. Rachko, V.N. Synakh, G. Kh. Tartakovskii および N.N. Filonenko の各氏が共同研究者である．とくに，Ya.G. Sinai 氏と V.I. Kisin 氏は，この本の原稿を読んでいただき，助言していただいた．また，V.A. Zykova 氏には，この本の原稿作成に際し多大な助力をいただいた.

ここに，これら全ての友人と共同研究者の御援助と励ましに対し厚く御礼申し上げる次第である.

G.M. ザスラフスキー

目　次

1章　力学の基礎とエルゴード定理

近年，力学系の理論が急速に発展しており，そこからストカスティックな* 力学現象（phenomena of stochastic mechanics；非決定論的力学現象）の新しい理解が深まりつつある．特に，このような系にとって物理過程の非線型性は非常に重要である．そこにおいて，非線形力学系と現代的エルゴード理論との関係は従来考えられていた以上に緊密であることが立証されてきている．古典力学系に関する多くの新しく得られた基礎的結果を用いることなしには，いかなるストカスティックな現象も取り扱うことができない．この結果は最近の文献 [19, 20, 21] で論じられている．この章では，これ以後の章を理解するために必要な，力学系のいくつかの一般的な側面を議論しよう．

1. 1　位相空間内の運動

リュービル（Liouville）の定理，ポアンカレ（Poincaré）の再帰定理，再帰時間，カッツ（Kac）の公式，リュービル方程式．

通常，粒子（もしくは系）の状態は，位相空間 (q, p) の中の 1 点で表わされる．q と p が N 次元ベクトルの系の自由度は N であり，位相空間は $2N$ 次元である．ハミルトニアン系（Hamiltonian system）の状態の時間発展は，ハミルトニアン関数，$H(q, p)$，で決められる．q と p とは次の運動方程式，

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1.1}$$

を満足する．ここで，時間を間隔 t だけずらす演算子 $\hat{T}(t)$ を

$$(q(t),\ p(t))=\hat{T}(t)(q(0),\ p(0)) \tag{1.2}$$

で定義する．演算子 $\hat{T}(t)$ は方程式 (1.1) から決められ，位相流（phase flux）と

〔訳注〕　**ストカスティック**（stochastic）又は，**ストカスティシティ**（stochastisity）は一般に乱雑性，不規則性を意味するが，本書では力学系において初期値のずれが時間的に指数関数的に増大し，正確な予測が実質的に不可能になるような力学的性質を表わすときに使われる。

呼ばれる [19].

リュービルの定理は，演算子 $\hat{T}(t)$ が任意の位相体積（phase volume）Γ に作用したとき，その体積が保存することを表わしている．すなわち，

$$\Gamma(t)=\hat{T}(t)\Gamma(0)=\Gamma(0) \tag{1.3}$$

が成立する．位相空間内の一般化された流れのベクトルを $J=(\dot{q},\ \dot{p})$ と定義しよう。方程式（1.1）から，

$$\operatorname{div} J=\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}+\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}\equiv 0; \tag{1.4}$$

が得られる．これはすなわち「位相液体」が非圧縮液体であることを意味している．（1.3）式と，この（1.4）式の性質は同等である [19].

つぎに，リュービルの定理から重要なポアンカレの再帰定理を導びこう．保存系（ハミルトニアン H が時間に陽に依存しない系）が有限の運動（位相空間内の限られた領域での運動）を行なうと仮定しよう．位相空間の 1 つの領域 A を考え，その中から 1 つの点 $Z=(q_0,\ p_0)$ を系の軌道の始点として選ぶ．そうすると，この系はある時間周期でこの領域に再び戻ってくる，というのがポアンカレの再帰定理である．

この定理を背理法を使って証明しよう．この再帰定理の例外は，A の中に測度 0 の点の集合が始点として選ばれる場合である．A の中の点の集合で A に再び戻って来ないものがあったとして，それを B としよう．十分に長い時間 t_1 の後に B の点が B_1 に移動する，すなわち

$$\hat{T}(t_1)B=B_1.$$

としよう．B の定義に従えば，B_1 と A との交わりは 0 のはずである．時間 $t_2=2t_1$ の後では

$$\hat{T}(2t_1)B=\hat{T}(t_1)B_1\equiv B_2.$$

となり，B_2 と B_1 との交差もやはり 0 となるはずである．もしそうでなければ B_1 のなかに経過時間 t_1 後にも B_1 を離れない点が存在することになる．しかし，運動方程式（1.1）の可逆性を使えば，これらの点は $t=0$ で A に属するとともに B_1 にも属することになりはじめの前提に矛盾する．そこで，演算子 $\hat{T}(nt_1)$ を B に連続的に作用させることによって，集合 B と互いに離れた半無限列，B_1, B_2, …，を得る．つまりリュービルの定理から

$$\Gamma(B)=\Gamma(B_1)=\Gamma(B_2)=\cdots,$$

が成立する．すなわち，集合 B に属していた点が動くとき，それは位相空間

$\Gamma(B)\cdot\infty$ を覆う．他方，運動が有限であるためには，この領域も有限でなければならない．これが成立するのは $\Gamma(B)=0$ のときだけである．以上がこの定理の証明である（注釈1参照）．

ポアンカレの定理に従うと，系はAに無限回戻ってくることになる．そこで平均再帰時間，あるいはポアンカレサイクルの時間を導入することが可能になる．スモルコフスキー（Smolukhovsky）はこの時間間隔を

$$\tau=t\sum_{k=1}^{\infty}kP_k\Big/\sum_{k=1}^{\infty}P_k, \tag{1.5}$$

で表わした．ここで P_k はこの系が kt 時間後に最初の領域Aに戻る確率である．カッツ [9] は系の運動がエルゴード的である場合に，(1.5) 式の計算を行ない，

$$\tau=t(1-P_0)/(P_0-P_1), \tag{1.6}$$

を導いた．ここで P_1 は t 時間後の再帰確率である．また，P_0 は系をはじめに領域 A に見出す確率である．$t\to0$ の極限で，P_1 と P_0 との差は t に比例するので，τ は人為的に導入された観測間隔 t に依存しなくなる．

このポアンカレサイクルの時間は，多くの粒子から構成される系にたいしては，とてつもなく，宇宙の年齢よりも長いことが知られている．しかし，系のストカスティックな振舞いは高々数自由度の系（2自由度の系でも）でも起こるし，それゆえ再帰時間を観測することも可能である．

(1.6) 式の簡単な例を考えてみよう．単純化するため，P_1はtに関して微分可能であると仮定する．t が小さい場合には

$$P_1\approx P_0+\dot{P}_1t$$

となり，ポアンカレの時間は

$$\tau=(1-P_0)/\dot{P}_1.$$

で与えられる．図1.1に2つの種類の系の発展の様子を示そう．この(a)の場合には集合の中の点は明らかに(b)の場合よりはるかに早く再帰する．このことは運動が不安定の場合には P_0，P_1 が安定な運動の場合に比べて小さいことを意味する．つまり，ポアンカレサイクルの時間が長いほど，位相空間の中での系の不安定性

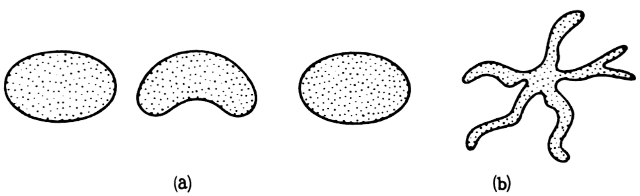


図 1.1 位相体積の細胞の変化，(a) 安定性，(b) 不安定性の場合

が強いということになる．

ここで再び系の時間発展の記述に戻ろう．ポアンカレの定理に関して上で述べた例は，位相空間の中を動く個々の独立した点を考えるよりも，点の集合を考えた方が有利であることを示している．そこで，物理学では通常，位相空間の中での粒子の分布関数，$f(q,p,t)$ を取り扱う．この分布関数は規格化条件

$$\int_{\Gamma} f(q,p,t)\,d\Gamma=1,\quad d\Gamma=dq\,dp.$$

を満足する．粒子数の保存法則の微分形は位相空間内の連続の方程式であり，これは

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{div}(Jf)=0,$$

と表わされる．この方程式は，(1.4) 式を考慮すると

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{q}\frac{\partial f}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial f}{\partial p}=0. \tag{1.7}$$

となる．方程式 (1.7) はリュービル方程式と呼ばれている．流れ，$J=(\dot{q},\dot{p})$ の各成分は p，q，（および t）の関数として与えられると仮定した．次のことに特に注意を払いたい．すなわち，方程式 (1.7) は方程式 (1.1) の運動方程式以上の情報は含んでいないということである．このことは，1次の偏微分方程式の特性から直ちに理解されるであろう．(1.7) 式の解は次の形に書ける．

$$f(q,p,t)=f_0(q_0=q_0(q,p,t),\ p_0=p_0(q,p,t)),$$

ここで (q_0,p_0) と (q,p) の関係は方程式 (1.1) で与えられ，初期条件は

$$f_0=f_0(q_0,\ p_0)=f(t=0)$$

で与えられる．特に1粒子の場合には

$$f(q,p,t)=\delta(q-q(t))\delta(p-p(t)), \tag{1.8}$$

と書ける．ここで $q(t)$ と $p(t)$ はその粒子の軌道を表わす．

このリュービル方程式 (1.7) は運動方程式と同様に時間に関して可逆である．

1.2　作用－角変数

「有用な」変数は何か？，断熱不変性，非線型振子の振動，プラズマ振動，非線型振動のスペクトルの性質．

通常，解析解を持つ特別な問題において，変数の選択は便宜的に行なわれる．

そして，「最良の」変数が何であるかという疑問は，一見無意味なことと思われている．しかし，作用（I）と角度（θ）という変数はポアンカレの仕事の中で，特に力学の一般定理の証明において，決定的に重要であった．変数（I,θ）は年年より広く用いられるようになってきた．ここで（I,θ）が選択される簡単な例を示そう．1つの閉じたハミルトニアン系ではエネルギー H は保存する．$I=I(H)$ であるから，I も運動の積分（恒量）である．もし，系に加わる摂動がゆっくりしたものであれば，1つの近似的な運動の積分が存在する．この積分は作用 I であり，それは指数関数的に精度が保存されることが分かっている [22]．系は I が十分に大きく変わるときにのみ，本質的な変化を受けると言うことができるであろう．

正準共役な変数（I,θ）は，1自由度系にたいしては次の関係で導入される．

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\oint p(q,H)dq = I(H), \\
\theta &= \frac{\partial S(q,I)}{\partial I},\quad S(q,I)=S(q,H(I))=\int p(q,H)dq,
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

ここで，$S(q,I)$ は端点を持つ作用（trancated action）であり，この場合には母関数になっている．（I,θ）にたいする運動方程式は

$$
\dot{I}=0,\quad \dot{\theta}=\frac{dH(I)}{dI}\equiv\omega(I). \tag{1.10}
$$

である．ここで $\omega(I)$ という量は非線型振動の振動数である．（1.10）式から派生する（I,θ）という量の特性により，1つのハミルトニアン系の任意の有限な周期運動を

$$
\begin{aligned}
q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(I)\exp(in\,\theta), \\
p &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(I)\exp(in\,\theta),
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

という形で表わすことができる．ここで展開係数 a_n, b_n は q と p が実数であることから，

$$
a_{-n}=a_n^*,\quad b_{-n}=b_n^*
$$

を満足し，問題に応じて定まる量である．以下で2つの典型的な問題によって，変数（I,θ）の有用性を示そう．

最初の例は非線型振子の振動である．この運動方程式は

$$
\ddot{x}+\sin x=0 \tag{1.12}
$$

で，ハミルトニアンは

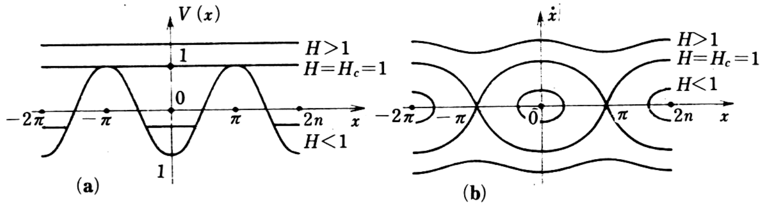


図 1.2　(a) 周期的ポテンシャル，(b) それに対応する位相平面

$$H=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\cos x \tag{1.13}$$

である．ここで振幅が少さい時の振動数が無次元単位系で1になるように問題を設定した．位相平面，$(x, \dot{x})$ の軌道の特異点は (1.1) 式の運動方程式で，右辺を0とした関係，

$$\dot{x}=0, \quad \sin x=0.$$

から得られる．この解は，$\dot{x}_0=0$, $x_0=n\pi\,(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ となる．点 $(x_0, \dot{x}_0)$ 近傍での運動の簡単な解析から $x_0=2\pi n$ は惰円型の特異点であり，$x_0=(2n+1)\pi$ は双曲型の特異点であることがわかる．$V=-\cos x$ と，位相平面での軌道を図1.2に示す．エネルギー $H<1$ の軌道は「束縛」(trapped)，$H>1$ は「非束縛」(untrapped) と呼ばれることもある．$H=1$ の軌道は特別な「自己交差」軌道であり，セパラトリックスと呼ばれる．この本を通じて，安定性とストカスティシティの問題においてセパラトリックスが演ずる非常に重要な役割を見てゆくことになる．方程式 (1.12) の解は良く知られているので，導出は省略し，$H<1$ のの場合の解を書くと

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=2\kappa\,\mathrm{cn}\,(t;\kappa),\\
&I=I(H)=\frac{8}{\pi}\left[E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)-(1-\kappa^2)F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)\right],\\
&\omega(I)=\frac{\pi}{2F(\pi/2;\ \kappa)},\quad \kappa^2=\frac{1+H}{2},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

となる．ここで cn は惰円余弦関数，F と E はそれぞれ第1種，第2種惰円積分である．ここで，速度をフーリエ級数

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=8\omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}}\cos[(2n-1)\omega t],\\
&a=\exp(-\pi F'/F),\quad F\equiv F(\pi/2;\ \kappa),\quad F'\equiv F(\pi/2;\ \sqrt{1-\kappa^2})
\end{aligned} \tag{1.15}$$

に展開する．$H\to H_c=1$（すなわち，$\kappa\to1$）での漸近形は

$$F\approx\frac{1}{2}\ln\frac{32}{1-H},\quad F'\approx\frac{\pi}{2},$$

$$\omega \approx \pi \Big/ \left(\ln \frac{32}{1-H}\right), \quad a \approx \exp(-\pi\omega). \tag{1.16}$$

と書くことができる．速度$\dot{x}$を時間の関数として定性的に表わしたのが図1.13である．この図に含まれる調和振動の数（number of harmonics），Nは実質的には山の頂の間隔と山の幅の比に等しいような波束を表わしていることが一般な議論から言える．すなわち

$$N \sim \frac{1}{\omega(I)} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{32}{1-H} \quad (1-H \ll 1). \tag{1.17}$$

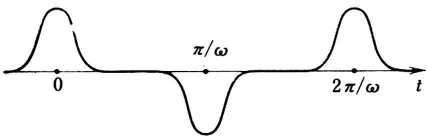


図 1.3 セパラトリックス近傍での速度の時間変化

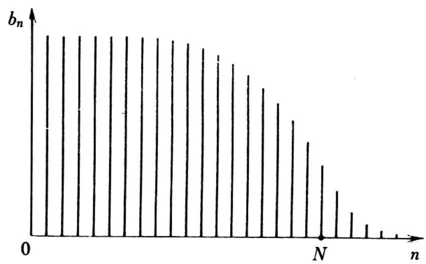


図 1.4 セパラトリックス近傍でのスペクトル

である．同じ結果を展開式（1.15）と（1.16）から直接導出することもできる．（1.15）式のフーリエ級数展開は（1.11）式の一般的な関係を実例で示したものであり，そこからa_n, b_nという係数がわかり，これから系のスペクトルが与えられる．方程式（1.16）と（1.17）はスペクトルが$n>N$で指数関数的に減少していることを示す（図1.4参照）．$H \to 1$で振動の周期と調和振動の数Nとは共に対数的に発散する．これはセパラトリックス近傍での運動の特徴である．Hが0から1に変化するとき，非線型振動の振動数$\omega(I)$は1から0に変化する．そして最終的には$H=1$のときに$\kappa=1$となり，

$$\dot{x} = \frac{2}{\cosh t} \tag{1.18}$$

となる．これは図1.3の1つの山の形を表わしており，他の山は無限遠に移動する．これは「ソリトン型」とも呼ばれている．*ここでは，セパラトリックスが存在するときの振動の特徴を明確に記述してきた．その非線型性は，ωがエネルギー（あるいはI）の関数となることに現われ，非調和振動性は（1.14）式の展開に現われる．これは本書を通じて研究の対象としてゆくものの典型的な場合である．しかし，自然にはいろいろな例が存在することを示すために，次に非調和性の振動ではあるが，振動数はエネルギーの依存性がないという非常に特別な例を

* 演習問題として，（1.12）式の非束縛軌道（$H>1$）の場合の解の性質を解析し，そして$H \leq 1$の場合の解がどのように接続されるかをみておくことをすすめる．

論じよう.

電子プラズマの振動は，次のハミルトニアンで記述されることが知られている[23].

$$H=\frac{1}{2}\psi^2-2\omega_0^2(2\varphi^{1/2}-\varphi), \tag{1.19}$$

ここで ω_0 はプラズマ振動数，$\varphi^{1/2}=1-v$, v は無次元量の電子速度である (1.19) 式に対応する運動方程式の解がつぎの様になることは容易に確かめられる.

$$\psi=-\cos[\pm\omega_0 t-\varepsilon(1-\psi^2)^{1/2}],$$

ここで，

$$\psi=\frac{1}{\varepsilon}(1-\varphi^{1/2}),\quad \varepsilon=\left(1-\frac{|H|}{2\omega_0^2}\right)^{1/2}.$$

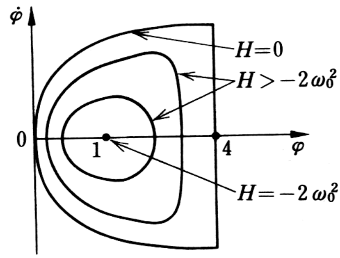


図 1.5　プラズマ振動の位相平面

である．位相平面内の軌道は図1.5で与えられる．$H=-2\omega_0^2$ で，軌道は一点に収束する．$H=0$ がセパラトリックスに相当し，$0>H>-2\omega_0^2$ の時に有限な運動が存在する．（演習問題として，$H>0$ での位相平面上の軌道をプロットしてみるのもおもしろいだろう．）

ここでの課題は，$\varphi(t)$ のスペクトルの性質を見出すことである．参考文献〔24〕で報告されている結果を述べよう．振動の周期はつぎのよく知られた公式から，

$$T=\oint d\psi/\dot{\psi}=2\pi/\omega_0,$$

と計算できる．このように振動数 $\omega=2\pi/T=\omega_0$ はエネルギーに独立となることがわかる．フーリエ級数展開

$$\varphi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n\exp^{(n\omega_0 t)}$$

の展開係数，φ_n は

$$\varphi_n=\begin{cases}2(-1)^{n-1}J_n(\varepsilon)n^2 & (n\neq 0),\\ 1+3\varepsilon^2/2 & (n=0),\end{cases}$$

となる．これは $n\gg 1$ で漸近的に，

$$\varphi_n\sim\begin{cases}n^{-7/3} & (1\ll n\ll N),\\ n^{-5/2}\exp(-n/N) & (n\gg N),\end{cases}$$

となる．ここで $N=(1-\varepsilon)^{-3/2}$ である．プラズマ振動はこのように非調和性の

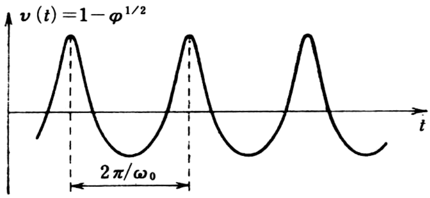


図 1.6　プラズマ振動のセパラトリックス近傍での粒子の速度

振動であことがわかる．また，前の例と同様にスペクトルは $n>N$ で指数関数的に減衰している．ε が1に近づくにつれて，セパラトリックス近傍に近くなり，数 N は無限大に近づく．図1.6の周期は ε が1に近づいても保たれているが山の形はより鋭くなる．

1. 3 非線型共鳴

外力により誘導された共鳴，結合された振動の共鳴

一般に，非線型共鳴の理論はハミルトニアン系でのストカスティシティの生成を解析するために重要な役割を果たす．普通は，系に摂動が加わるとき，ある適当な近似法を用いて解を見出すという手続きをとる，この近似方法は，系の初期の摂動を受けないときの挙動と摂動を受けたときの挙動の間の相異に基づいて次のように分類できる．これを図1.7に示す．

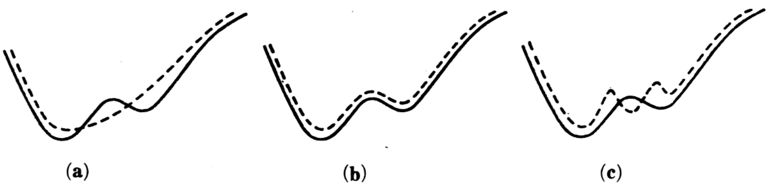


図 1.7 ポテンシャルの摂動のいろいろな型（実線—非摂動ポテンシャル，鎖線—摂動を受けたポテンシャル.）

(i) 全てにわたり，あるいは部分的に不規則性を平滑にするような方法

(ii) 不規則性の数と型とを不変に保つような方法

(iii) 摂動によって引きおこされた不規則性を明示するような方法

非線型共鳴の理論は第3の型に属している．

いま，非線型振動子に周期的な外力が加わった場合を想定しよう．そして，その非線型振動子の振動数は外力のそれに近いと仮定しよう．共鳴は振動の振幅を大きくするが，ここでは非線型性のために，すなわち振動数が振幅の関数であるために，振動子の振動数は外力の振動数からずれ，その共鳴が抑制されてしまう．ハミルトニアン系では漸近的な安定状態や漸近的に安定なリミットサイクルは存在しない．したがって系は数周期後に再び振動数が共鳴の近傍に現われる（注釈3参照)．つぎに，このような振動の理論を簡単に説明しておこう．

摂動を受けた非線型のハミルトニアンは，一般に次のように書くことができる．

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\ \theta,\ t), \tag{1.20}$$

ここで ε は摂動を特徴づける無次元の微小パラメータ（$\varepsilon \ll 1$）である．V は時間的に周期的であるとする．すなわち，次式を満足するものとする．

$$V(I,\ \theta,\ t)=V(I,\ \vartheta,\ t+T),\quad T\equiv 2\pi/\nu.$$

それゆえ，V をフーリエ級数で

$$V(I,\theta,t)=\frac{1}{2}\sum_{k,l} V_{kl}(I)\exp i(k\theta+l\nu t)+C.C.$$

$$V_{kl}=V^*_{-k,-l}, \tag{1.21}$$

と展開することが可能である．ここで星印（*）は複素共役を意味し，k と l は正および負の整数である．（1.21）式の右辺の $C.C.$ はその前項の複素共役（complex conjugate）をとったものである．方程式（1.20）の運動方程式は

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial \theta}=-\frac{1}{2}i\varepsilon\sum_{k,l} kV_{kl}(I)\exp i(k\vartheta+l\nu t)+C.C.$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H_0}{\partial I}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial I} \tag{1.22}$$

$$=\omega(I)+\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{k,l}\frac{dV_{kl}(I)}{dI}\exp i(k\theta+l\nu t)+C.C.$$

となる．もし，等式

$$k_0\omega+l_0\nu\approx 0, \tag{1.23}$$

が（1.22）式の右辺のどれかの項で成立するならば共鳴が起こり，I は時間と共に増大する．

いま，最も簡単な場合として，$k_0=-l_0=\pm 1$ のところでの共鳴項だけを考えよう．この場合，方程式（1.20），（1.22）において高振動の非共鳴項は無視することができるので，

$$H=H_0(I)+\varepsilon\bar{V}_0(I)\cos\phi,$$

$$\dot{I}=\varepsilon\bar{V}_0(I)\sin\phi, \tag{1.24}$$

$$\dot{\phi}=\omega(I)-\nu+\varepsilon\frac{d\bar{V}_0}{dI}\cos\phi,$$

を得る．ここで

$$\phi=\theta-\nu t+\varphi,\quad V_{1,-1}=|V_{1,-1}|\theta^{i\phi}=\bar{V}_0\theta^{i\phi}.$$

とした．このように単純化したにもかかわらず（1.24）式は，解析のためには，まだ複雑である．ここで1つの無次元化されたパラメータ，

$$\alpha=\left|\frac{d\omega(I)}{dI}\right|\frac{I}{\omega} \tag{1.25}$$

を導入しよう．そして

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon. \tag{1.26}$$

を仮定する．この不等式は（1.24）式にたいして，これから用いる変換と近似法とを正当化するための条件である．I_0を（1.23）式の共鳴条件が厳密に満足される時の作用の値としよう．すなわち

$$\nu = \omega(I_0).$$

が成立するとしよう．ここで次の(i)〜(iv)の近似を行なう． (i) $H_0(I)$ を I_0 の近傍で展開し，2次のオーダーまで取る； (ii) $V(I)$ を $V(I_0) \equiv V_0$（定数）で置き換える； (iii) ϕ に関する方程式（(1.24) 式の第3式）の ε に比例する第3項を無視する； (iv) $\omega(I)$ を I_0 の近傍で展開して，1次のオーダーまで含める．以上の近似を用いると，ハミルトニアンは次の近似的な表式

$$H = H_0(I_0) + \omega(I_0)\Delta I + \frac{1}{2}\frac{d\omega(I_0)}{dI}(\Delta I)^2 + \varepsilon V_0 \cos\phi,$$
$$\Delta I \equiv I - I_0, \tag{1.27}$$

で表わされる．また，その運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\Delta I = \varepsilon V_0 \sin\phi, \quad \dot{\phi} = \frac{d\omega(I_0)}{dI}\Delta I. \tag{1.28}$$

となる．ここでハミルトニアンを次のように正準変換する．

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\omega'(\Delta I)^2 + \varepsilon V_0 \cos\phi, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega(I_0)}{dI}, \tag{1.29}$$

このハミルトニアンは，非線型共鳴のユニバーサルなハミルトニアンと呼ばれる．このときの正準変数は（$\Delta I, \phi$）であり，これらは（I, θ）と次の変換で結ばれている $H_0(I_0)$ は定数).

$$(I, \theta) \to (\Delta I, \theta - \nu t), \quad \bar{H} = H - \nu \Delta I, \quad \nu = \omega(I_0), \tag{1.30}$$

また，(物理学において，(1.30）の変換はしばしば回転座標系への変換といわれる).

物理学においては，このように簡略化を行なって非常に難かしい問題を解がわかっている他の問題に結びつけて論じるという方法がしばしば使われ，また有用である．実際に，ハミルトニアン (1.29) は，(1.13) 式の非線型振子のハミルトニアンと同等である．方程式（1.28）を微分すると位相振動の方程式,

$$\ddot{\phi} - \varepsilon V_0 \omega' \sin\phi = 0, \tag{1.31}$$

を得る．これが（1.12）式と異なるのは，位相差に関する方程式であるという点だけである．したがって，解析は非常に容易になる．図1.8に位相振動の様子を

示す．軌道のパターンは，回転座標系でも変わらず振動数 $\nu=\omega(I_0)$ で非摂動運動の面を回転する．

位相振動の振幅が小さい場合には，振動数は方程式（1.31）から，

$$\Omega=(\varepsilon V_0|\omega'|)^{1/2}\sim\omega(I_0)(\varepsilon\alpha)^{1/2} \qquad (1.32)$$

となることがわかる．セパラトリックスの場合，作用の幅は $\psi=\pi/2$ のときの H から

$$\max \varDelta I=(2\varepsilon V_0/|\omega'|)^{1/2}\sim I_0\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/2} \qquad (1.33)$$

で与えられる．また，振動数にたいするセパラトリックスの幅は，

$$\max \varDelta\omega=|\omega'|\cdot\max \varDelta I\sim\Omega \qquad (1.34)$$

となる．

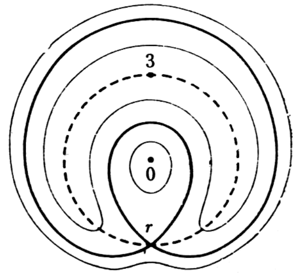


図 1.8　1次の非線型共鳴：鎖線 $I=I_0$ にたいする非摂動軌道；太実線　位相振動のセパラトリクス；E　位相振動の惰円型特異性，H　位相振動の双曲型特異性

ここで，非線型共鳴にみられる2つの特徴的な性質に注意を払おう．まず，主要なパラメータ，$\varDelta I/I_0$，$\varDelta\omega/\omega_0$ は $\varepsilon^{1/2}$ に比例して変化し，標準的な摂動理論で与えられるように ε には比例していない．$\varepsilon\ll1$ では $\varepsilon^{1/2}\gg\varepsilon$ がなりたつから，こからのパラメータの増分比は大きい．実際，非線型共鳴の理論は $\varepsilon^{1/2}$ をパラメータとして作られている．次に注意すべき点は，位相振動のセパラトリックスの出現に関することである．すなわち非線型性に帰因する非摂動運動の特異性に，更に少なくとも2つの特異性が摂動のために付け加わることである．その1つは双曲型，もう1つは惰円型の特異性である．ここで，共鳴条件（1.23）が $l=-1$，$k_0\neq1$ でも成立していると仮定しよう．このとき，上記の全ての議論は成立するが，位相 ψ は

$$\psi=k_0\vartheta-\nu t$$

と表わされる．これは，セパラトリックスが作る位相平面の中の細胞が「首飾り」型の形状になることを意味する（図1.9は $k_0=6$ の場合）．この細胞の数は k_0 に等しく，k_0 個の双曲型と惰円型の特異点の対が共鳴のため付加されることになる．

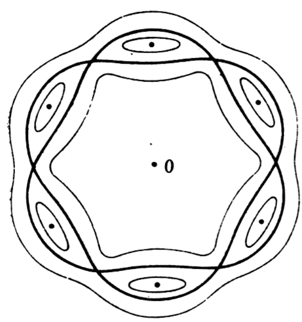


図 1.9　複雑な場合の非線型共鳴

つぎに，上で行なった近似を議論しよう．方程式（1.24）の ψ にたいする第3項が第1項に比べ少さいという条件は，（1.26）式の左側の不等式から導かれる．$V(I)$ を $V(I_0)$ で置きかえることは，$\varDelta I/I\ll1$ という条件と同等であり，これは（1.26）式の左

側の不等式とも同等（(1.33) 式での議論による）である．共鳴項と比較して非共鳴項を無視することは，$\Delta\omega/\omega \ll 1$ ならば正しく，これは (1.32) 式より (1.26) 式の右側の不等式に対応している．

不等式 (1.26) の本質的な役割は，それが非線型共鳴のもうひとつの特徴をもたらすことにある．それは非線型性が十分に大きいとき ($\alpha > \varepsilon$) に表われる．簡単にいえば，ε や α がともに十分に少さいからといって系の運動が自動的に決まるわけではない．何故なら，運動の型は ε や α 値にだけでなく，これらの比によって異なるからである．

上述の非線型共鳴の解析は明らかに簡略的すぎる．多くの印象的で，一般的かつ説得力のある結果がアーノルド (Arnold) の著書 [19] に記述されている．非線型共鳴の問題がいかに複雑であるかは，これ以後もしばしば論じるだろう．1つの簡単な一般化を行なって，この節を締めくくろう．

2粒子系での共鳴結合を考えよう．この系のハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1,2} H_0^i(I_i) + \varepsilon V(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) \tag{1.35}$$

と書くことができる．この運動方程式は

$$\dot{I}_i = -\partial H/\partial\theta_i, \quad \dot{\theta}_i = \partial H/\partial I_i \quad (i=1,2)$$

である．共鳴結合というのは

$$n\dot{\theta}_1 - m\dot{\theta}_2 = n\omega_1(I_{10}) - m\omega_2(I_{20}) = 0 \tag{1.36}$$

が成立する場合のことである．ここで (n, m) は整数，(I_{10}, I_{20}) は作用である．前の例と全く同様に，方程式 (1.35) と (3.36) においてフーリエ級数展開

$$V = \frac{1}{2}\sum_{n,m} V_{nm}(I_1, I_2) \exp i(n\theta_1 + m\theta_2) + C.C.$$

で共鳴結合の項だけを残す．そして，H_0^i と $\omega_i = dH_i^0/dI_0$ を共鳴の近傍 (I_{10}, I_{20}) で展開する．(1.29) 式の場合との類推から，この近似で次の有効ハミルトニアンが (1.35) 式から導かれる．

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1,2} \omega_i'(\Delta I_i)^2 + \varepsilon V_0 \cos\psi \tag{1.37}$$

ここで

$$\omega_i' = \frac{d\omega_i(I_i)}{dI_i}, \quad \Delta I_i = I_i - I_{i0}, \quad \psi = n\theta_1 - m\theta_2 + \varphi$$

$$V_{nm}(I_{10}, I_{20}) = |V_{nm}(I_{10}, I_{20})| e^{i\varphi} \equiv V_0 e^{i\varphi}$$

である．(1.37) 式，もしくは (1.35) 式を用いて運動方程式は

$$\dot{I}_1 = \frac{d}{dt}\Delta I_1 = \varepsilon n V_0 \cos\psi$$

$$\dot{I}_2=\frac{d}{dt}\Delta I_2=-\varepsilon m V_0 \cos\phi$$
$$\dot{\phi}=n\omega_1'\Delta I_1-m\omega_2'\Delta I_2 \tag{1.38}$$

となる．$\dot{\phi}$ の方程式を微分することで，位相振動の方程式は

$$\ddot{\phi}+\varepsilon V_0(n^2\omega_1'+m^2\omega_2')\sin\phi=0$$

と書ける．これから位相振動の振動数は

$$\Omega=[\varepsilon V_0(n^2\omega_1'+m^2\omega_2')]^{1/2} \tag{1.39}$$

で与えられる．ここで ω_1' と ω_2' とが (n^2/m^2) に比例し，かつ逆符号の系の場合にはもう一つの縮退がおこる可能性があることに注意しておく．以下ではそのような場合は考えない．(1.38) の最初の 2 つの式を加え合わせると

$$mI_1+nI_2=\text{const.} \tag{1.40}$$

という保存則を得る．これはパラメトリック増幅の理論において，マンリイーロウェ (Manley-Rowe) の式として知られている関係式である．この式と (1.37) 式とから，作用を時間の関数として決めることが可能になる．

ここまでは，非線型共鳴理論の最も本質的な形式的性質を選んで論じてきた．この節で論じたことと，小さいパラメータにたいする標準的な摂動理論とでは全く異なる性質が一つ存在することに注意しよう．図1.10の位相軌道を考えよう．曲線(a)と(b)とはトポロジー的に同一であり，「連続的な」曲げにより，あるいは小さな摂動を加えることにより互いに変換できる．しかし，非特異的な摂動では「弓を結ばせる」ことは，たとえ弓が小さくともできない（図 1.10 (c)）．そのためには特別な手法が必要である．この節で述べた方法もその一つである．

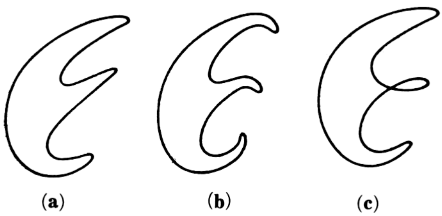


図 1.10　標準的な摂動理論では(c)の場合のように“弓を結ばせる”事はできない．

1.4　コルモゴロフ－アーノルド－モゼールの理論

多次元運動，不変トーラス，作用－角変数，既約閉積分路，ポアンカレ写像，安定性の理論，位相空間の次元とその役割

N 自由度の力学系は，$2N$ 次元の運動方程式で記述される．ハミルトニアン系の運動方程式を解く際にどれだけの数の運動の積分（恒量）が必要であろうかと

いう疑問は次のリュービルの定理が答えてくれる（注釈4参照）.

N自由度のハミルトニアン系が有限な運動を行ない，そこでN個の一価で関数的に独立な運動の積分 $F_1, F_2, \cdots, F_N$ が存在すると仮定しよう．さらに，これらは交換すると仮定する．すなわち

$$[F_i, F_j] \equiv 0, \quad i, j=1, \cdots, N$$

とする．ここで［,］はポアッソン括弧を意味する．そのとき以下の事柄が成立する．

(i) 系の軌道はN次元トーラス上にある．

(ii) 運動は条件付きで周期的であり，N個の振動数

$$\omega_i=\omega_i(F_1, \cdots, F_N), \quad i=1, \cdots, N;$$

で特徴づけられる．

(iii) トーラス上の座標を角変数θ_iで表わすと，これらは

$$\dot{\theta}_i=\omega_i(F_i, \cdots, F_N), \quad i=1, \cdots, N,$$

すなわち，

$$\theta_i=\omega_i t+\text{const}, \quad i=1, \cdots, N.$$

となる．

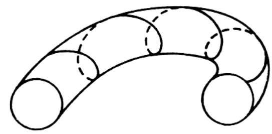


図 1.11 2次元トーラス上の運動

この様に，ハミルトニアン系が積分可能性を持つためには，$2N$ 個ではなく N 個の運動の積分をみつけさえすればよい．つまり，もし $N+1$ 個の一価の運動の積分を見つけたとすると，そのうちの1つは残りのN個の運動の積分の関数で表わされる．2自由度の場合（図1.11参照），1つの運動の積分がみつかれば十分である．何故なら，残る一つはエネルギーであるからである．

このリュービルの定理の結果は，系のハミルトニアンが次の形に書けることを意味している．

$$H=H(F_1, \cdots, F_N)$$

しかし，この表式はF_iとθ_iとが必ずしも正準共役でないから有用なものではない．

ここで，$I_1, I_2, \cdots, I_N$を角変数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$に正準共役な一般化運動量（作用）としよう．そして，これらの変数にたいする運動方程式が，

$$\dot{I}_j=-\frac{\partial H}{\partial \theta_j}=0, \quad \dot{\theta}_j=\frac{\partial H}{\partial I_j}=\omega_j(I_1, \cdots, I_N),$$

$$j=1, \cdots, N. \tag{1.41}$$

で与えられるとしよう．方程式（1.41）から作用 I_j は運動の独立な積分であり，その数は N に等しい．したがって

$$F_j=F_j(I_1, \cdots, I_N),\ \ j=1, \cdots, N,$$

という変換式が存在しハミルトニアンは

$$H=H(I_1, \cdots, I_N). \tag{1.42}$$

と表わされるはずである．

変数（I_i, θ_i）を導入すれば方程式（1.41），（1.42）を得ることができ，運動方程式が簡単に積分できると思われるかもしれない．しかしながら，問題は条件式（1.41），（1.42）を満足する（原則的には少なくも）N 個の変数 I_j が存在するかどうかということである．

運動の積分を探すために，半古典的な量子化規則の解析の際に役立ったアインシュタイン（Einstein）の論法を使うことにしよう．まず，I_j を

$$I_j=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_j}\sum_{k=1}^{N}p_k dq_k,\quad j=1, \cdots, N. \tag{1.43}$$

と置く．ここで，C_j は以下で議論するような形の閉積分路である．また

$$\int dS\equiv\int\sum_{k=1}^{N}p_k dq_k$$

という量は第1ポアンカレ積分不変量である．運動の積分の数が厳密に N の時，そしてその時のみ dS は全微分である．そのとき，dS を閉じた積分路で積分した量は，もしその積分路が1点に収縮することが可能であれば零になる．そこで公式（1.43）においては，　(i) 1点に収縮しない　(ii) 他のものに連続的に変換されない，という基本的な閉積分路を考える必要がある．このような閉積分路を既約と呼ぶ．もし，運動が N 次元のトーラスの上を進むなら既約積分路の数も N である．$N=2$ の時にそれを与える方法を図1.12に示す．この方法から，直ちに（1.43）式を通して N 個の作用が定まり，運動の積分も N 個となる．もし，その積分の数が N 個より少なければ，幾つかの不変的な作用量が破壊されていることになる．簡単な幾何学的な議論（図1.11参照）から，完全な運動の積分の集合があれば，その上を軌道が巻きつくようなトーラスは不変であることがわかる（このことはリュービルの定理からも導びかれる）．したがって，

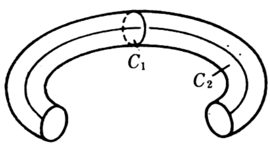


図 1.12　既約閉積分路 C_1，C_2 は一点に収縮せず，また，他のものに変換されない．

運動の積分の破壊は，同時に不変トーラスの破壊に相当する．そこから次の2つの基本的な疑問が生じてくる．

(i) 不変トーラスの安定性の問題（不変トーラスは，摂動を受けたとき，摂動が小さいからといって保存されるか？）

(ii) 破壊の問題（運動の積分が破壊された時，系の運動はどうなるか？）

これらの問題を別の観点から論じてみよう．トーラスを，その内軸に垂直な面で切断してみよう（図1.13参照）．軌道は，それが1回転するたびに，この面とある点で交差するはずである．運動の結果として（すなわち，ある発展演算子によって），1つの選ばれた面の1点は，同じ面に戻り新しい点に変換される．ここで，系の連続的な発展は（1.2）式と同様に，

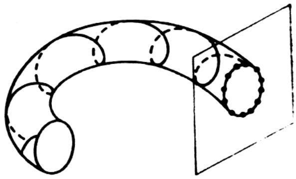


図 1.13 ポアンカレ写像

$$(q(t),\ p(t))=\hat{T}(q(0),\ p(0))$$

で表わされるが，これは不連続写像

$$(q_{n+1},\ p_{n+1})=\hat{T}(q_n,\ p_n), \tag{1.44}$$

におきかえることが可能である．これは通常ポアンカレ写像と呼ばれる．もし，運動の軌道がトーラス上にあれば，（1.44）式の写像の点は1つの閉曲線をおおう．1つのトーラス上の運動の振動数が通約可能な振動数という特殊な場合（共鳴トーラス）には写像の集合は有限の数の点からなり，共鳴トーラスの上の粒子の軌道は有限回の回転の後に，自分自身に閉じる．この新しく導入した概念を用いると，「不変トーラスの存在する場合はポアンカレ写像の点の集合は閉曲線となり，共鳴の場合には有限個の点となる」ということができる．不変トーラスが破壊された場合には，ポアンカレ写像の点は，明らかに閉曲線を構成しない．この破壊がおこる場合に，写像の点がどうなるかを調べてみる必要がある．

さて，いよいよコルモゴロフ－アーノルド－モゼール（Kolmogorov-Arnord-Moser），略して（KAM）の定理について論じよう．これは，安定性の問題を論ずるために基本的なものである．まず，次のようなハミルトニアンの系を考えよう．

$$H=H_0(I_1,\cdots,I_N)+\varepsilon V(I_1,\cdots,I_N;\ \vartheta_1,\cdots,\vartheta_N), \tag{1.45}$$

ここで，無摂動ハミルトニアンは

$$\det\left|\frac{\partial\omega_i}{\partial I_j}\right|=\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i\partial I_j}\right|\neq 0$$

の意味で非縮退であると仮定する．また，ε は摂動を特徴づける無次元の微小量（$\varepsilon \ll 1$）である．この定理の意味するところは，十分小さい $\varepsilon < \varepsilon_0$ にたいしては，大部分の不変非共鳴トーラスは保存はするが無摂動トーラスと比較すると少し変形するということである．位相軌道はそのトーラス上のあらゆる所で密に巻きついており，N個の振動数を持つ条件付き周期運動を表わす．また，トーラスの一部分は破壊されるが，その測度は $\varepsilon \to 0$ で 0 に近づく（注釈 5 参照）．

KAM の定理には，特筆されるべき 2 つの特徴がある．第 1 の特徴は，安定性が保持される境界のサイズ，ε_0 に関連したことである．KAM の定理においては ε_0 の値は，真の安定性の領域 ε_c と比べて一般的に小さく，境界の存在は現実的というよりむしろ抽象的なものである．現実の境界 ε_c の厳密な定義は非常に難かしい問題であり（後に示すように），ε_c は通常は半定性的議論か，数値解析を基礎として評価するしかない．

第 2 の重要な特徴は，異なる次元すなわち異なる自由度の位相空間での不変トーラスのトポロジーが異なるということから派生するものである．つまり，$N=2$ の場合には，作用 (I_1, I_2) の異なる値に対応するトーラスは互いに埋め込まれており（図 1.14 参照），それらは交差することはない．この場合には，トーラスが空間を分割しているという．破壊トーラスは安定トーラスの間にはさまれており，それゆえこの破壊領域の位相軌道は安定軌道のトーラスに束縛されている．$N>2$ ではトーラスが空間を分割するということはなく，また交差もする．そのため，異なる破壊共鳴トーラスの領域は位相空間において複雑なチャンネルのネットワークを形成することになる．このチャンネルを通って，軌道は無摂動の一つの領域から遠くに行くことができる．この現象はアーノルド拡散と呼ばれており，付録 2 で議論する．このように $N>2$ で，初期条件がたまたまある位相空間上にあると，軌道はいくらでも遠くに動けるような領域が存在する．ただし，$\varepsilon \to 0$ でこの領域の測度は 0 になる．

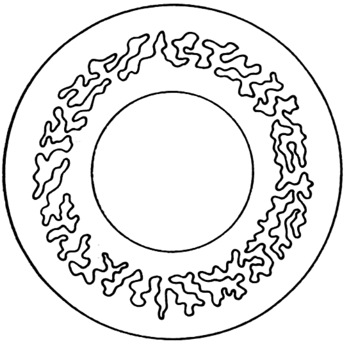


図 1.14　$N=2$ の場合，破壊トーラスは安定トーラスにはさまれる．

ここで $N=2$ のときだけ，なぜトーラスが空間を分割するかを示す簡単な議論をしておこう．$2N$ 次元位相空間の一定エネルギー面の次元は $2N-1$ であり，それを異なる領域に分割する境界の次元は $2N-2$ である．もしトーラスが空間を分割するなら，その次元 N は

$$N \geq 2N-2,$$

の条件を満足しなければならず，それゆえ $N \leq 2$ である．

この節を終えるにあたって，KAM 理論が統計力学の基礎的問題で演じる特別な役割を強調しておくことは有益であろう．実際，安定な場合には統計的記述は不向きである．また統計的記述は，有限の N で系の運動がストカスティックでない有限数（少ない数であろうとも）の領域（安定性の島）を含んでいるような系にたいしても不向きと思われる．

1. 5 エルゴード性と混合性

基礎となる定義，局所不安定性，K 系，クリロフ（Krylov）の思想，有限な緩和時間と混合性

この節と次の節で，最近流行のエルゴード理論の基本的概念を紹介し，それと力学系の理論との関係を論じる．ここでは定性的な議論に留めておく．この問題を厳密に取り扱かった文献も幾つかある［28～31］．物理学者むきに書かれたものには総合報告［14］がある．

1つの系の時刻 t のときの状態を表現する位相空間 (q, p) の1点を

$$z(t)=(q(t),\ p(t))$$

と書こう．以前と同様に，系の発展は時間の移動演算子 $\hat{T}$ で決められる．連続的な運動の場合には

$$z(t+T)=\hat{T}z(t) \tag{1.46}$$

となり，また運動方程式が有限の差分形で与えられる場合（例えばポアンカレ写像）には

$$z_{n+1}=\hat{T}z_n \tag{1.47}$$

となる．z の任意の積分可能な関数 f の時間発展は

$$f(z,\ t+T)=\hat{S}_T f(z,\ t) \equiv f(\hat{T}z,\ t), \tag{1.48}$$

という形で表わされる．ここで導入した演算子 $\hat{S}_T$ は量子力学のS行列に類似している．

もし，時間平均と位相空間での平均（位相平均）とが等しいならばこれを

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' f[z(t')]=\langle f \rangle, \tag{1.49}$$

で表わす．ここで，左辺が時間平均であり，右辺は位相平均

$$\langle f \rangle \equiv \int f(z)d\Gamma(z),$$

である．この等式（1.49）が時刻 t の選ぶ方に依らず成立するならば，運動はエルゴード的であるといわれる．方程式（1.46）と（1.48）とを使い，条件式（1.49）を

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dtf[\hat{T}(t)z(0)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\hat{S}_t f[z(0)]=\langle f \rangle. \quad (1.50)$$

と書くことができる．不連続的発展の場合には条件式（1.49），（1.50）は

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(\hat{T}_n z(0))=\langle f \rangle. \quad (1.51)$$

となる．なお，ある系の運動がエルゴート的であるという場合，方程式（1.49）と（1.51）とがほとんどの軌道について成立しなければならないが，（1.49），(1.51)の条件が成立しないような測度 0 の軌道の集合が存在してもかまわない．

混合性という概念は，統計力学に重要な役割を果たしたギブス (Gibbs) の仕事で既に導入されていた．しかし，これはエルゴード性よりもとらえにくい概念であり，その内容の深遠さは，ごく最近になって理解され始めた．ここで，相関関数 $\mathscr{R}$ を導入しよう．f と g とを力学変数 z の任意の積分可能な関数とするとき，相関関数は

$$\mathscr{R}(f, g|T)=\langle \hat{S}_T f, g\rangle-\langle f \rangle\langle g \rangle,$$
$$\mathscr{R}_n(f, g)=\langle \hat{S}_n f, g\rangle-\langle f \rangle\langle g \rangle \quad (1.52)$$

で定義される．ここで一番目の式が連続時間の場合の相関関数であり，二番目の式が不連続な時間の場合の相関関数である．混合性の条件は，形式的には

$$\lim_{T\to\infty}\mathscr{R}(f, g|T)=0, \quad \lim_{n\to\infty}\mathscr{R}_n(f, g)=0, \quad (1.53)$$

で定義される．これは物理学において，時間相関の消滅として知られている．位相空間の中に“液滴”のようなものを考えると，混合性の場合にはその位相空間での運動は極端に複雑になる（図1.15参照）．つまり，液滴の境界は不規則なアメーバ状の

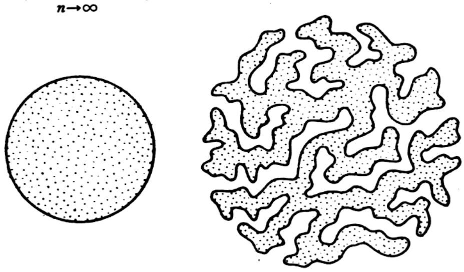


図 1.15　混合性の場合の位相空間の“液滴”のひろがり．

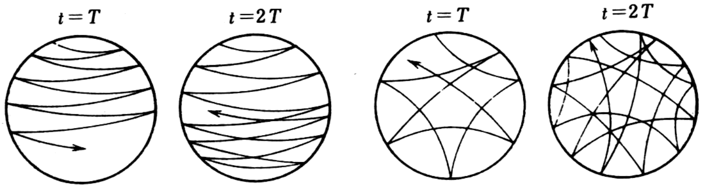


図 1.16 エルゴード的運動(a)と，混合性を伴う運動(b)の違い．

形状になる．時間の経過と共に境界の複雑さは益々増大してゆき，位相空間のあらゆる領域にまで広がる．リュービルの定理から液滴の体積は保存される．そこで，位相空間は液滴が触毛のように伸びて細くなったもので覆われるようになる．(1.49)から (1.51) のエルゴード性の条件は，混合性の条件 (1.53) から自動的に導かれる．純粋にエルゴード的な運動と混合性を伴う運動との違いを図1.16に表わす．混合性がない時のエルゴード性の場合には，軌道が連続的に，かつ，規則的に位相空間を覆う．これは周期的に上下する振り子のようなものに相当する．混合性の場合には位相空間は全く別の方法で覆われる．まず，系がある時間(T)のあいだに全位相空間をほぼ一様におおうとすると，時間 $2T$ では，この過程が近似的に繰り返され，この時のネットワークで囲まれた細胞の大きさは時刻がTの時のほぼ2分の1になる．以後，同じことが繰り返される．形式的には，このエルゴード性と混合性との差異は系のスペクトルに表われてくる．スペクトル密度 $\mathscr{R}(\omega)$ を

$$\mathscr{R}(f, f \mid T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega T} \mathscr{R}(\omega)\, d\omega.$$

で導入しよう．混合性のないエルゴード運動の場合のスペクトルは不連続である．すなわち

$$\mathscr{R}(\omega) = \sum_k \mathscr{R}_k \delta(\omega - \omega_k),$$

となる．他方，混合性の運動の場合にはスペクトルは連続的になる．

図1.15と図1.16を見るだけでも，混合性という性質が力学系の不安定性の性質に，より緊密に結びついていることが理解できるであろう．この混合性の特徴は負の曲率の空間での運動の解析を行なったホッフ (Hopf) により注目された．その後，クリロフは混合性を生み出す際に，不安定性の演じる役割について明瞭で完全な説明を与えた．クリロフは，同時にこの概念を統計力学の基礎の問題に適用し，また特定の物理モデルについて論じた．(注釈7参照)

位相空間の中に，任意の小さな細胞を考えよう．混合性によって，この細胞は全位相空間に広がる．このことは，最初は接近していた2点が時間と共に互いに離れ，それらの運動に類似性がなくなることを意味している．そこで2つの軌道が時間と共に離れてゆくような不安定性をもつ系には混合性が存在することが十分に期待できる．言い換えると，このとき初期条件にたいする小さな摂動により，系の位相軌道の形状は無摂動の形状から大きな変化を受けることになる．この系の位相空間が（少なくとも1変数について）有限であるとすると，系の初期条件のわずかに違う2つの軌道はある限度以上は離れることができないので，軌道はまぜこぜになる．この型の不安定性は「局所不安定性」と呼ばれる．$D(t)$ を位相空間での，時刻 t における異なる軌道に属する2点の距離とすると，局所不安定性の形式的定義は

$$D(t)=D(0)e^{h_0 t}, \tag{1.54}$$

という関係が，ある方向において存在することである．ここで，不安定性の増加率 h_0 は一般的には位相空間の座標の関数である．

後に，局所不安定性の条件（1.54）は混合性

$$\mathscr{R}(t)\sim\exp(-h_c t), \tag{1.55}$$

をもたらすことを示す．ここで

$$h_c=1/\tau \tag{1.56}$$

という量は相関の消滅時間の逆数であり

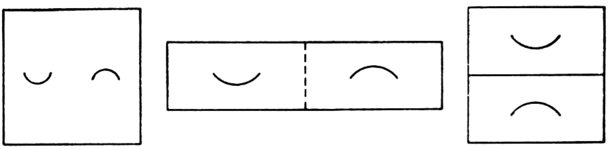
$$h_c\sim\langle h_0\rangle. \tag{1.57}$$

の関係が成立する．ここで $\langle h_0\rangle$ は h_0 の位相空間での平均である．

（1.57）式は，系の統計的性質を表わす量 h_c と，系の純粋に力学的な性質を表わしている h_0 との間に関係があることを意味している．言い換えると，系の規則的な運動（例えば条件付き周期運動）が破壊され，運動が混合性をもつようになるのはどのような場合であるかを判断できるということである．そのためには，力学系で局所不安定性，（1.54）が表われる条件を見出さなければならない．これ以後，この条件をストカスティック不安定性の条件，もしくはストカスティシティの条件という．最大の不安定性がおこるのは，系のエネルギーを除く全ての運動の積分が破壊される場合である．クリロフは，破壊されない一価の運動の積分の表面上で，初期の位相細胞がある有限な緩和時間のあいだに任意の精度の均一さで混合性をおこし，その表面を覆ってしまうことが厳密にストカスティック不安定性であることを示した．このように，緩和時間をもつという系の性質は，

まさに統計力学の考え方に典型的なものである（注釈8参照）.

式（1.54）から（1.56）の性質を持つ系は K 系と呼ばれる（K 系のより厳密な定義と解析は次節で与える）. K 系に顕著な性質とは，それが力学系であるにもかかわらずその座標と運動量が時間の乱雑な関数となることである（力学系は時間反転可能な微分方程式もしくは差分方程式で記述されるが，その解が乱雑な関数となることもあり得る（注釈9参照）.）. 実際，物理学で出会ういろいろなタイプの K 系を解析するために多くの解説が行なわれている. ここでは，運動が不連続の変換（写像）で記述される K 系の例を与えるが，詳しい解析は行なわない. この例を選ぶ理由は，それが非常に簡単であるというだけでなく，数学においてしばしば見られ，また物理学に典型的な技法を使うためである.



(a)　　(b)　　(c)

図 1.17　パイこね変換

“パイこね変換”（Baker's transformation）とは測度を保存するように単位正方形の点を単位正方形に写像する方法の一つである. 正方形を y 軸方向に 1/2 に縮め，x 軸方向に 2 倍に伸ばしてみよう（図 1.17 参照）. そこで，得られた長方形を y 軸方向に沿って 2 等分し，その右側の部分を左側の上に乗せる. すると，これはまた正方形になる. この正方形に再び上述の操作をほどこし，以後この操作を続ける. このパイこね変換は混合性と局所不安定性の性質をもつ. もし，正方形の中に初期座標を選び，その点の“軌道”，すなわちその点の写像の点列を考えると，パイこね変換で生成される座標点は乱数列を作ることが証明できる（もちろん，測度 0 の点の集合で例外は存在する. このような保留はエルゴード理論においてもあらわれた）. 演習として，図 1.17 の弓形 $\cup$ と $\cap$ がパイこね変換を続けるとどうなるか解析してみることを推める.

一般的な系で混合性を持つような系がどれほど存在するか，あるいは安定な系の数と局所不安定な系の数とはどちらが多いだろうか，という疑問を持たれるかもしれない. もし位相空間中に任意の（たとえ非常に小さくても）局所不安定性の領域を持つ系を，後者（局所不安定性の系）の中に含めるなら，全体として考えるとこの後者の系が大部分を占めている. ほとんどの系が 0 でないストカスティックな運動の領域を持つことがわかるであろう. その理由は後で明確になる.

1. 6　エントロピー

分布関数の粗視化，コルモゴロフの力学的エントロピー，K 系とエントロピー，K 系と同形

ボルツマン（Boltzman）は系の巨視的発展の方向性を与える有名な H 定理を定式化した．ボルツマンはまた，系の分布関数 $F(p,q)$ を使って次のエントロピーの定義を導入した．

$$S[F]=-\int F\ln F\,dp\,dq. \tag{1.58}$$

(6.1) 式の定義式には，留意しなければならないことがある．

$f(p,q,t)$ が，リュービル方程式（1.7）を満足する分布関数であるとすると，この分布関数にはまだ運動論的記述に固有な性質は含まれていない．実際，1.1節で述べたように，リュービル方程式を解くことはハミルトンの正準方程式 (1.1) を解くことと同等である．この事実のもう一つの特性として次の等式が成りたつ．

$$\frac{dS[f]}{dt}=0, \tag{1.59}$$

ここで

$$S[f]=-\int f\ln f\,dp\,dq. \tag{1.60}$$

である．(1.59) 式は (1.60) 式を微分して

$$\frac{dS[f]}{dt}=\int(1-\ln f)\frac{df}{dt}dp\,dq.$$

となることと，リュービル方程式から $df/dt=0$ であることから見出せる．分布関数 f を通して定義されるエントロピーは，このように時間に依存しない．

この“厳密な”分布関数が，何らかの方法で粗視化（coarse grained）された関数で置き換えられると状況は変わってくる．そこで

$$F=\frac{1}{\delta\Gamma}\int_{\delta\Gamma}f\,d\Gamma, \tag{1.61}$$

で定義される関数 F を導入する．ここで，$\delta\Gamma$ は粗視化の領域である．この関数 F は，ある条件で時間にたいして不可逆な運動論的方程式を満足し，$dF/dt\neq 0$ となる．このとき，$S[F]$ も時間の関数になるのであろう．

ボルツマンのもう一つの主張は，

$$S=k\ln W, \tag{1.62}$$

であった．ここで W は分布関数 F で記述される状態の統計的重率である．公式 (1.62) の詳細な解説と証明はエーレンフェスト (Ehrenfest) [34] により与えられている．多くの年月の後，ウィーンのボルツマンの墓に碑が立てられ，その台には (1.62) の式が彫まれた．その碑の除幕式において，ハンス チリング (Hans Thirring) は「碑の全てが一千年のくずで埋もれることがあっても，この公式は堂々と成り立っているであろう」と言った．科学のその後のいろいろな分野（統計物理学，情報理論，その他）での発展は，ボルツマンのこの公式に反映された事柄がいかに深遠なものであるかを確認した．そのような一例を少し後に述べる．

まず，平衡の近傍では系の状態は位相空間の中の $\Delta\Gamma$ の領域に一様に分布する．そこで，統計重率 W は

$$W\approx\Delta\Gamma/\Gamma_0 \tag{1.63}$$

となり，S は

$$S=\ln\Delta\Gamma, \tag{1.64}$$

と書ける．ここで簡単のために $k=1$，$\Gamma_0=1$ とした．

前節において，ある条件の下で力学系はストカスティックな系として振舞うということを知った．この系について「軌道（分布関数ではなく）の特性だけを使って，力学系に直接に適用できるようなエントロピーを定義することが可能であろうか」という問題が，コルモゴロフによって解かれた[35, 36]．コルモゴロフは情報理論の考え方を使って力学的エントロピー，あるいは K エントロピーと呼ばれ，h でと記される量を定義した．〔エントロピーを力学系に導入する類似した方法は，それより少し前に，オデッサ (Odessa) 大学のアロブ (Arov) によって示されていた（参考文献 [35] と [37] の脚注)〕．様々な物理的な状況に相当する K 系の形式的な定義は以下のように与えられる．それは，ハミルトニアン系（あるいは保測変換をもつ系）にたいして

$$h>0. \tag{1.65}$$

の系である．(1.65) の本質的な点は，$h\neq 0$ ということである．

コルモゴロフのエントロピーに関する論文は，ある極限的な状況の力学系の厳密な解析から始められている．この極限的な状況とは，KAM 定理の条件とは逆に，不変トーラスの最大破壊の条件が成り立つ場合である．この解析はアノソフ (Anosov) とローリン (Rohlin)，シナイ (Sinai) [38〜42] によって発展させら

れた（総合報告［29～31］，［43～44］を参照）．*K* エントロピーと，通常のエントロピーを含む多くの物理的概念との関係はチリコフ（Chirikov）［15］により議論された．

*K*エントロピーの概念がどのようにして導入されたかを見てみよう．形式的なアプローチは少々複雑であるため，ここではエントロピー h を非形式的に導入しよう．位相空間の初期要素 $\Delta\Gamma_0$ の発展を考えよう．リュービルの定理により

$$\Delta\Gamma(t)=\Delta\Gamma_0,$$

であるが，位相空間の液滴の形は変化している．空泡のようなものがその中で成長しはじめる（図 1.18 参照）．時間が経過すると泡の構造はよりこまかくなる．同時に液滴の包絡面も広がり，大きな体積を含むようになる．Γ と同じ次元を持つ量 ε を導入して，図1.18の位相空間の液滴のネットワーク構造を ε で粗視化してみよう．このことは，ε より細い位相の糸が全て“衣を着る”ということを意味する．このことはまた，粗視化された位相空間での体積 $\Delta\Gamma(t)$ が時間と共に成長することも意味している．局所不安定性の公式（1.54）から

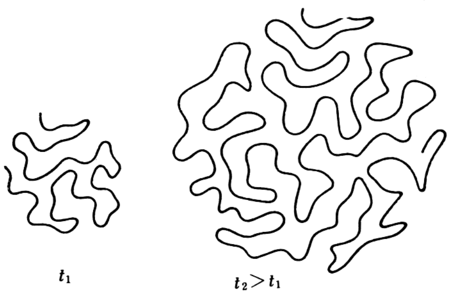


図 1.18　粗視化された位相体積の時間発展

$$\overline{\Delta\Gamma}(t)=\Delta\Gamma_0 e^{ht}, \tag{1.66}$$

が示される．ここで，h は不安定性の成長率 h_0 を，位相空間の体積で平均したものである．いま，(1.66) 式を (1.64) 式に代入すると

$$S=\ln\overline{\Delta\Gamma}(t)=\ln(\Delta\Gamma_0 e^{ht})=ht+\ln\Delta\Gamma_0. \tag{1.67}$$

を得る．(1.62) のボルツマンの公式から (1.64) に移行する際，(1.63) 式の統計重率の表式において系の状態は体積 $\Delta\Gamma$ の中でほぼ一様に分布していると仮定した．もし t が余り小さくなければ，体積 $\overline{\Delta\Gamma}(t)$ も同じく一様性の性質をもつ．これは 1.5 節で与えた混合性の場合に位相空間が一様に充たされるということから導かれる（図 1.16 を参照）．物理量は（エントロピーも含めて）出来る限り正確に決定しなければならない．粗視化の精度が ε のときに，$\Delta\Gamma_0$ を ε より小さく選ぶ事は明らかに無意味である．そこで，(1.67) 式において $\Delta\Gamma_0=\varepsilon$ とし，その後に $\varepsilon\to0$ の極限を求めよう．すなわち

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\Delta\Gamma(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(ht+\ln\varepsilon)=h. \qquad (1.68)$$

という表式を考えてみる．この表式はコルモゴロフのエントロピー h の定義である．(1.68) 式の極限の順序は本質的である．K エントロピーの性質は以下のとおりである．

(i) エントロピー h は位相空間での軌道の混合性という純粋に力学的な過程の結果から生じるエントロピー S の時間変化の割合を表わす．

(ii) エントロピー h，局所不安定性の成長率 h_0，そして相関消滅時間の逆数 h_c とは同じオーダーの量である．

$$h\sim h_0\sim h_c. \qquad (1.69)$$

この式は K エントロピーの物理的内容を良く表わしている．

(iii) エントロピー h は系の計量不変量 (metric invariant) である．すなわち，その値は位相空間を細胞に分割し，粗視化する方法に依存しない．

(iv) 同じ値のエントロピー h をもつ系は，ある意味で互いに同型である [31, 45]．すなわち，これらの系は同一の統計的運動法則をもっている．

この同型性を更に詳しく分析しよう [30, 46, 47]．まず，変数 (x) と変換 $\hat{T}^{(1)}$ とで，1つの力学系が作られているとしよう．また混合性の結果として分布関数 $f^{(1)}(x)$ が平衡に到達しているとしよう．同様に，同じ空間 (x) に変換 $\hat{T}^{(2)}$ で決まる力学系を導入する．それは平衡分布 $f^{(2)}(x)$ を持つとする．そこで，もし1つの系の位相空間の領域 $\Gamma^{(1)}(x)$ を他の位相空間の領域へ1対1写像する Q が存在するなら，力学系 $\{\hat{T}^{(1)};x\}$ と $\{\hat{T}^{(2)};x\}$ とは同型であるという．このとき

$$f^{(1)}(\hat{Q}x)=f^{(2)}(x),\quad \hat{Q}\hat{T}^{(1)}x=\hat{T}^{(2)}\hat{Q}x.$$

が成立する．この第2番目の条件は次の2つの遷移の径路が同等であること，すなわち

$$x\to\hat{T}^{(1)}x\to\hat{Q}\hat{T}^{(1)}x,$$
$$x\to\hat{Q}x\to\hat{T}^{(2)}\hat{Q}x.$$

を意味する．しかし，x と $\hat{Q}(x)$ の領域からは，ある測度0の集合は除かれなければならない．

上で与えた力学系の同型の定義はそれほど役に立つものとはいえない．なぜなら，現実の力学系にたいしては，写像 $\hat{T}$ は $t<0$ で一価でないためである．そこで，もし2つの力学系の同型の定義において1対1写像の条件をゆるめることを考えよう．ハミルトニアン系についてシナイにより示されたように [46, 47] 2つ

の系で

$$h(\hat{T}^{(1)})=h(\hat{T}^{(2)}).$$

が成り立つならば，このような系は弱い同型と呼ばれる．以後において弱い同型のかわりに単に同型という言葉を使う．したがって，同型の力学系は同じエントロピーを持つことになる．

実際には，現実の力学系の同型という概念には後で述べるような，より骨の折れる議論が必要である．

エントロピーが増大する筋道を探ることによって，Kエントロピーのもう一つの特徴を明らかにすることができる．$\varepsilon\to 0$ のとき（すなわち $S(t)\to ht(t\to\infty)$ となるとき），エントロピー S は成長を続け最大値は存在しない．もし，粗視化 ε_0 を有限とするなら状況は変わってくる．その時，方程式（1.66）から領域 $\Delta\Gamma_0\equiv\varepsilon_0$ が $\Delta\Gamma=1$ に広がる時間 t_0 が

$$t_0=\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}. \tag{1.70}$$

と決められる．（1.70）の時間の間に，位相液滴 ε_0 は全位相空間に一様に広がり，エントロピーの成長は停止する．

1. 7　歴史的背景

統計力学の基礎，ツェルメロ（Zermelo）とロシュミット（Loschmidt）のパラドックス，ボルツマンとエーレンフェスト（Ehlenfest）の立場，混合性，クリロフの相補性原理

ボルツマンの H 定理が1872年に出現してから1世紀以上経過したが，“統計力学の基礎”に属する問題についての議論はまだ続いている．この議論はツェルメロとロシュミットにより定式化された2つのパラドックスを源として，その周辺に集中している．これらのパラドミックスに関してここで簡単に述べておこう．

再帰パラドックス（ツェルメロ），ポアンカレの再帰定理によれば，系の初期状態として選ばれたどのような状態も，ある時間（再帰時間）の後に任意の精度で再現される．再帰のときにはエントロピーは初期エントロピーにほぼ等しい筈である．これは H 定理のエントロピー増大という推論に矛盾する．

可逆性パラドックス（ロシュミット），力学の運動方程式は時間に関して可逆

である．そこで，系が発展するときの状態の列 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を考えると，全く同じように状態の列 $z_n, \cdots, z_2, z_1$ を考えることができる．これは，運動方程式は時間的に可逆であるためである．1つの状態 z_i はエントロピー S_i に対応することができる．そこで，もしエントロピーが一つの状態の列で増大するなら他の列では減少し，このことは H 定理に矛盾する．

これらのパラドックスにたいするボルツマンの回答を現代の人達が読むとき，ボルツマンが彼自身が発展させた運動論的理論の基本原理をいかに奥深く理解していたかということに非常に深い感銘を受ける．残念なことに，統計的記述に役に立つ明白で堅固な議論を当時はできなかった．痛烈な批判と繰り返される言葉の上での攻撃がボルツマンの悲惨な死の原因の一つであった．"Lectures on the Kinetic Theory of Gases" (1904) の第2章の導入部分でボルツマンはこう書いている．

「私は，これらの攻撃が誤解に基づいており，また運動論的理論の意味は未だありのままに認識されていないと確信している．私は，もし運動論的理論に現在反対している人達が，それを無きものとすることに成功するなら，アイザック・ニュートンの権威によって光の波動論が被ったのと同じような莫大な損害を科学は受なければならないという意見を持っている．私は多数の反対意見に直面した人が，いかにふがいなさを感じるかを身をもって体験している．しかしながら，運動論的理論を勉強し直さなければならない人達が，既に真実とわかっていることを再発見しなくても済むように，私は理論の最も困難で深遠なる章までも人間なら理解できる程度に明白に説明するつもりである．」

統計力学の基礎は，問題の形式的な側面と事実に基づく側面とを含んでいる．前者はハミルトニアン力学の可逆な運動方程式を基礎として不可逆な運動論的方程式を導出するという枠組みを厳密に実体化するという問題に関連している．一般にこのプログラムは，ある明確な仮定と定義を導入することにより実現される．この仮定の例は，ボルツマンの衝突数の仮定 (Stosszahlansatz) や，いわゆる乱雑位相近似 (RPA) である．問題の事実に基づく側面とは，これらの仮定を自然な形で明確にすることだけでなく，実際に観測される物理過程の非可逆性の解釈とも関連している．例えば，容器の左側半分に閉じこめられた気体は，仕切りが除かれた後は容器全体に広がり，全ての分子が再び左側に戻るということはありそうもない．もちろん，ここではツェルメロとロシュミットのパラドックスを解くことが最も重要というわけではないが（後で示す）本質的な役割を演じる．

そこで，これらのパラドックスから出発しよう．

過程を統計的に記述することと，粗視化して記述するとこの２つから，再帰性と可逆性のパラドックスを解決することが可能になる．もし，系の粒子数が非常に大きい場合には（例えば 10^{23}），再帰時間（1.1参照）は想像を絶するほど長い．言い換えると，再帰の確率は考えられないくらい小さい．粗視化操作，もしくは粗視化分布関数の導入という操作は，低確率事象を無視することを意味する近似のことである．系の近似的再帰は，この低確率事象に含まれる．それ故，粗視化分布関数に関する運動論的方程式は再帰を含まない．同じ理由から，粒子の運動方程式の微視的可逆性は，粒子を粗視化分布関数で記述する時に消滅する．なぜなら，粗視化分布関数による記述は任意の２つの巨視的状態の間の両方向の遷移確率を等しくする遥動過程を無視することを意味するからである．実際，これがツェルメロやロシュミットの批判にたいしてボルツマンが一貫してとった立場であった．カッツ［10］はボルツマンの次の返答を引用している．系は必らず初期状態に戻らなければならないというツェルメロの異議にたいして，ボルツマンは反論した．「あなたはそんなに長く待てるのか！」．そして全ての分子の運動の方向が可逆であり，その結果としてエントロピーは増加しないで減少するはずだというロシュミットの意見にボルツマンは反撃した．「どうぞ全ての分子の運動を反転させてみなさい！」．

運動論的理論の基礎に関するボルツマンの思想はエーレンフェストによって大きく進展させられた．エーレンフェストは統計力学の基本法則に関して，しばらくの間は物理学者たちを融和させる論理的な枠組みを発展させることに成功した．そこでは，エーレンフェストの壺の中の球というモデルが重要な役割を演じた．このモデルの厳密でエレンガントな解と，それを簡略化したものがカッツの著書［9, 10］に書かれている．

しかしながら，統計力学の基礎において最も扱かいにくく難かしい問題というのは，ある定エネルギー面（一般的には運動の積分が一定である面）で系の状態の分布がいかに一様になるかという問題であった．ボルシマンを始めとする物理学者は，エルゴード定理，または系のエルゴード性がこの問題の解決に役立つと楽観していた．しかし，この方向でなされた多くの試みが失敗に終わったことから，統計力学の基礎の問題は，ある意味で多くの物理学者に「それ自身の事柄を論ずるための問題」とみなされてしまう程に信用をなくしてしまった．現在ではこのアプローチが失敗の宣告を受けた理由はよく理解されている．クリロフによ

ってなされた深遠な解析によると，統計法則がいかにして現われるかということを理解するためには，力学系のエルゴード性に基礎をおくのではなく，混合性の性質と局所不安定性が保証されているということ（エルゴード性はこれから導かれる）に基礎をおかなければならないということが示されている．現在まで粗視化という手続きは力学方程式を補う手法であって，自然そのものではなく，科学者によって，単に過程の記述のために導入されたものである．正確に言えば自然がどの様に「系を粗視化するのか」ということは，まだ理解されていない．残念ながら，この困難な問題を克服するためのクリロフの努力は，最後まで続けられなかった．今知り得ることは，クリロフが（量子力学における相補性原理の類推から）系の状態を決定するための精度に関する特別な相補性を捜すことによって，この問題を解決しようとしていたということだけである．これはすなわち，巨視的な系での実験の精度が最大に近づく程，その実験の結果，巨視的系の性質は大きく変化するというものであった．

最近のエルゴード理論によると，自由度の数が大きいことは系の統計的性質が出現するための必要条件ではない．この統計的性質は2粒子系でも出現するであろう．このことと関連して，ツェルメロやロシュミットのパラドックスが混合性や局所不安定性の概念を用いると，どのように解決されるかを示すことは有益であろう．

まず，ポアンカレの再帰定理は系の統計的性質の出現と全く無関係であることを注意しておく．再帰性は条件付き周期運動でも，ストカスティックな運動でも存在する．後者の場合，再帰時間の系列（周期）が乱数列を作り，また少数粒子系ではこの時間が短かい．不可逆性とは，系が初期状態の近傍に戻らないことはあるのではなく，それと全く異なった性質である．規則的な形状の位相液滴を考えて，その形状の時間変化を追ってみよう．安定な（混合性の無い）場合，液滴の表面は不十分にしか変化しないが，他方，局所不安定性のある場合には液滴表面は非常に早く，複雑にからみ合った形状に変化する（図1.15参照）．不可逆性とは，厳密に，この形状から現われてくるものである．混合性が起こった後には，液滴が「元の形」に戻る確率を計算した者はいない．直観的に言えば，この確率は多粒子系の再帰性の確率と同程度に小さいことは明らかである．この確率を無視することは粗視化と同等であり，それから不可逆性に到達する．

さて，ボルツマンがロシュミットへの返答に示したように，全ての粒子の速度を逆向きにすることによって高い確率の状態から低い確率の状態に系が進行する

ようにさせることが不可能であるという理由を論じよう．小さな領域 Δ_0 から離れてゆく1つの軌道の束を考えよう．あまり長くない時間の後に，Δ_0 を離れた軌道の束が入っている領域 Δ，$\Delta\sim\Delta_0$，を考えよう．さて，Δ は位相空間の粗視化のスケールであったことを思い出そう．このことは，Δ の中の軌道の個々の特徴をつかむことができないということを意味する．すなわち，領域 Δ の中の軌道であれば，Δ_0 を離れて Δ に達したものと，他の領域から離れ Δ に達したものとを区別することができない．それ故，Δ_0を離れた軌道を逆転させることはできない．正確に言えば，Δ_0を離れた軌道だけを逆転させることはできない．Δ にあるおびただしい数の，他の軌道を含んだ，全ての軌道を逆転させることはできる．系の混合性の性質が重要な役割をはたすのはここの所である．つまり，いま述べたことが成り立つためには混合性が必要なのである．局所不安定性の場合を考えると，短時間（混合時間）の間に領域 Δ には Δ_0 を出発点としない他の軌道も含まれることがわかるであろう．粗視化とはこのように，ある瞬間に粗視化領域 Δ に到達した（それゆえに，後の任意の瞬間においても）個々の軌道の情報の損失をもたらし，また混合性によって情報を失った諸々の軌道が有限の時間に粗視化領域に到達することを可能にする．最後につけ加えておかなければならない重要な事柄は，混合性によって位相空間のほぼ全ての領域から来た軌道が粗視化領域を覆うということである．その結果，この情報の混合はによって，位相空間の（決して小さくない）ほぼ大部分の領域に対応する状態を均一に表わす軌道で $\Delta\sim\Delta_0$ の領域が占められるようになる．この混合性の機構によって情報の損失が最大値に達すると，安定な状態が出現するのである．

1章に関する注釈

1.　ポアンカレの定理は統計物理学の理論の発展の中で非常に特殊な役割を演じている．この定理は，ツェルメロのパラドックス（後で述べる）の基礎となり，ボルツマンの運動論的理論に否定的な役割を果たした（以下に述べるように根拠のないものであったが）．

2.　ポアンカレの定理は，系がどのように最初の領域に戻るかは示していない．引き続いて起こる再帰の時間間隔は，乱雑分布を含め，何らかの規則で支配されている．しかしながら，統計力学に関する多くの論文や著書において，再帰定理は，系がほぼ周期的な運動をする証明であると解釈されている．

3.　ここでの非線型共鳴理論の議論は，主に参考文献［14］に従っている．より詳しい記述はチリコフの著書［15］，および総合報告［48］にある．有力な手法の解析と結果は，

アーノルドの著書［49］に与えられている．この本は古典力学に関する最新の本であるというだけでなく，多くの「過去」の結果が精密に書かれており，学ぶところが多いので強くお推めしたい．その力学的側面は，アーノルドの本［20］で扱かわれている．

4. この章で扱かったことの厳密な解析，証明，全ての結果の出典はアーノルドの著書［19］に与えられている．

5. 古典力学における安定性の問題の重要性の認識は，ポアンカレの研究にまでさかのぼる．その研究の応用はもっぱら天体力学の問題に限定されていた．この問題解決の困難さは，良く知られている小さい（もしくは共鳴）分母（small denominator）の問題と結びついている．KAM 定理の意味するところは，これらの困難を克服するという点でなく，それによって系の安定性を時間極限をとらずに定式化することが可能になるというところにある．最近の物理学の進歩で，安定性が原理的な側面からも応用を目指した側面からも本質的な役割を果たすと考えられるようなおびただしい数の問題が見出されてきた．KAM 理論は，古典三体問題や他の天体力学の問題以外にも，加速器中の荷電粒子の運動や，磁場トラップ，連続体の運動，分子運動，など多くの問題を論じる際に重要な役割を果たしてきた．

この定理のアイデアはコルモゴロフにより1954年［50］に示唆された．アーノルド［51～53］はその証明を与え，モゼール［54, 21］は安定性定理を独立に（最初の仮定は少し異なるが）証明した．KAM 定理のいろいろな応用についての議論は総合報告［13, 14, 15, 48, 27］を参照されたい．

6. 異なる自由度の間に弱い相互作用が働くときの運動の積分の存在については，ポアンカレが KAM 定理と実質的に同じ条件のハミルトニアン（1.45）式を使って研究した．その結果は，任意の小さい ε で，解析的積分が存在しないという，良く知られているポアンカレの定理である．この定理の結果を統計力学を基礎づける問題に使おうという試みが，後にフェルミ（Fermi）とプリゴジン（Prigogine）により行なわれた．このポアンカレの定理を基礎とした試みには，条件が必要となることが明らかになったのは KAM定理の出現した後である．実際，共鳴トーラスの系は位相空間のあらゆる所で稠密である．これらのトーラスは相互作用の結果として破壊される．その結果，不変トーラスは存在するが，それらは変数の非解析的関数となる．残念ながら，今だにこの点に関する誤まった解釈が物理学の文献に見られる．

7. クリロフ（Nikolai Sergeyevich Krylov（1917-1947））はフォック（V.A. Fock）の学生で，レニングラードで研究した．残念ながら，彼の統計力学の基礎に関する極めて深遠で難解な解析を含む研究は完成しなかった．尚早の死のため，クリロフは統計力学の基礎を発展させるプログラムの構想を終結させることができなかった．クリロフの結果の主要なものはフォックとミグダル（A.B. Migdal）の努力によってクリロフの死後に出版された．このクリロフの著書は系の力学的記述から統計的記述への移行を研究しているソビエトの物理学者や数学者に大きな影響を与えた．今日では，この本［33］はこの分野の研究にとって必読の文献といわれている．

8.　混合性の条件（1.53）を決定するためには相関消滅の法則が（1.55）式のような指数関数型である必要はない．統計力学の問題としては，指数関数型が典型的であるというだけである．例えば，相関消滅がベキ関数である場合には，局所不安定性（1.54）は，むろん存在せず，平衡への有限な緩和時間も存在しない．しかし，興味ある点は，例えば1次元の相互作用のない粒子の気体はこのような系であることである．実際，この場合には2つの粒子の距離は粒子の速度を v_1，v_2 とすると

$$D=|v_1-v_2|t+D_0,$$

と線型に増大する．そこで容易に

$$\mathscr{R}(x,x;\ t)\sim 1/t.$$

が示される．この系は参考文献［55］に詳しく解析されている．そこでは有限な緩和時間が存在せず，理想的な系（すなわち非相互作用粒子系）は統計力学を基礎づけるには，むろし不適当な構造であるといわざるを得ない．

もう一つの注意が必要である．実際には（1.54）式から（1.55）式への移行はある保留付きで受け入れられる．局所不安定性（1.54）の特徴は位相空間の様々な領域でかなり不均一になり得るということである．結果として，相関の指数関数的な消滅は成長率 h_0 が十分に大きく，時間 t があまり大きくないときに成立する．局所不安定性が非常にゆっくり成長するような位相空間の領域では，序々に減衰する漸近的な相関関係が存在する．「中間的」な漸近形を持つ相関関数はこのような領域を数個もっている．

9.　一見すると，可逆的な運動方程式が存在し，その解がランダムな関数であるというのはパラドックス的である．このパラドックスは，乱雑さは不可逆に違いない，という物理学者のあいだにしばしば存在する思い違いに帰因している．実際には，平均化あるいは何等かの方法で粗視化された量だけが不可逆的に振舞う．それは，運動方程式の厳密な解に含まれている系の全情報の一部が失なわれるためである．次のことも注意しておこう．ストカスティックな場合には厳密な記述が原則的には可能であるが，実際上は運動の複雑さのために不可能である．そこで，*K*系の場合には余計なものであったり，意味が不明である情報を失なうという犠牲のもとで，系の縮約された（それゆえ不可逆な）系の記述へ移行する必要性（それは興味ある可能性であるが）がある．

2章　ストカスティシティの基準

ストカスティシティという言葉が物理学において常識的になったのはごく最近のことである．これは系の規則的運動と乱雑な運動との分離があいまいにされていた時代が終わったことを意味する．現在では，系のパラメータとして，$K<1$ のときには系の運動が安定で，$K\geq 1$ では運動が混合性になるというような無次元量 K を規定することが可能になっている．この不等式は，ストカスティシティのための基準（もしくはストカスティックな不安定性の基準）と呼ばれている．この基準を定義することはそれほど単純な仕事ではない．一般的に，ストカスティシティの基準は半定量的，または半定性的で多くの場合には数値解析を用いて調べられている．本書の第3章以後の主題はこれにあてられる．

ストカスティシティの基準は，系の非常に特異な性質を定めること，すなわち，運動を規則的と乱雑的という2つの異なったタイプに分けるパラメータの値を決めることを意味している．その結果，「混合性が正確に起こるようなモデルは存在するのか」という問題が当然のことながら出てくる．この章では，実際の物理系に類似した，そのようなモデルを論じる．

2.1　混合性の2つのモデル

連分数とストカスティシティ，引き伸ばし変換，定常状態の分布関数

乱雑な挙動が発生するような古典的な例を1つ考えよう．いま，$0<x<1$ の範囲の中の1つの数を次のような連分数に分解したとする．

$$x=\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}}, \tag{2.1}$$

ここで a_i は正整数を意味する．a_i を求めるのは容易であって，

$$a_0(x)=\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\},$$

$$a_1(x)=\frac{1}{\left\{\frac{1}{x}\right\}}-\left\{\frac{1}{\left\{\frac{1}{x}\right\}}\right\}, \tag{2.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

のように書ける．ここで $\{\cdots\}$ は引数の分数部分を表わす．また，演算子 $\hat{T}$ を，

$$\hat{T}(x)=\{1/x\}. \tag{2.3}$$

のように定義し，(2.2) 式と (2.3) 式とを比較すると

$$\begin{aligned} a_1(x)&=a_0(\hat{T}(x)),\\ a_2(x)&=a_1(\hat{T}(x))=a_0(\hat{T}^2(x)),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{2.4}$$

を得る．これらの関係をまとめると

$$a_{n+1}(x)=a_0(x_{n+1}), \tag{2.5}$$

$$x_{n+1}=\hat{T}(x_n)=\{1/x_n\},\quad x_0\equiv x. \tag{2.6}$$

と表現できる．すなわち，方程式 (2.5) から，連分数の全展開係数は 0 番目の係数 a_0 で表わされる．このとき，0 番目の係数，a_0，の引数は，あるひとつのルールで作られ，そのルールは有限差分の運動方程式と同様に方程式 (2.6) で与えられる．ここで x は方程式の初期条件になっている．

ここで述べておきたいことは，(証明に後に与えるが) 力学系の方程式 (2.6) で定義される数列，x_n，が乱数列になるということである．そこで，$n\to\infty$ での x_n の分布を分析してみよう．このことは，定常状態の分布関数 $\rho(x)$ を見出すことと同等である．$\rho(x)$ は

$$\int_0^1 \rho(x)dx=1. \tag{2.7}$$

のように規格化条件を満足している．以下では ρ にたいする運動方程式を，写像の式 (2.6) を用いて構築することを考える．まず α,β を端点とする区間 A，(α,β; $0<\alpha<\beta<1$) を考えよう．すなわち，A は

$$A=\int_\alpha^\beta dx=\beta-\alpha,$$

である．A の測度は

$$\mu(A)=\int_\alpha^\beta \rho(x)dx, \tag{2.8}$$

で定義する．これは，x が A の区間の中に入る確率である．さて，ある時刻 $t=$

$n+1$ に点 x_{n+1} が属す区間を A_{n+1} とする．その測度は $\mu(A_{n+1})$ である．この点の逆像は

$$x_n = \hat{T}^{-1}(x_{n+1}). \tag{2.9}$$

と書ける．定義からその測度は

$$\mu(A_n) = \mu(\hat{T}^{-1}A_{n+1}). \tag{2.10}$$

である．方程式（2.8）と（2.10）から，分布関数 $\rho(x)$ が定常ならば

$$\mu(A_{n+1}) = \mu(\hat{T}^{-1}A_{n+1})$$

であり，これは単純に

$$\mu(A) = \mu(\hat{T}^{-1}A). \tag{2.11}$$

と表わされる．問題は方程式（2.11）の右辺の具体的な形を求めることである．方程式（2.6）によると，区間の端点 $x=\alpha$ は逆像

$$\hat{T}^{-1}\alpha = \frac{1}{m+\alpha},$$

に対応する．ここで m は任意の正整数，$m=1, 2, \cdots$ をとるものとする．実際 $x_n = 1/(m+\alpha)$ とすると（2.6）式から，$x_{n+1}=\alpha$ となる．同様に

$$\hat{T}^{-1}\beta = \frac{1}{m+\beta}.$$

が成立する．このことは，もし x の逆像が

$$\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{1}{1+\alpha}\right), \left(\frac{1}{2+\beta}, \frac{1}{2+\alpha}\right), \cdots \tag{2.12}$$

の範囲の中にあれば，x が区間 $A=(\alpha, \beta)$ の中にあることを意味する．方程式（2.12）と（2.8）とを考慮し，確率和の定理を使うと，方程式（2.11）は

$$\int \rho(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{1/(m+\beta)}^{1/(m+\alpha)} \rho(x)dx, \tag{2.13}$$

と書くことができる．方程式（2.13）は複雑な形はしているが，その規格化条件（2.7）を満足する解は

$$\rho(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}, \tag{2.14}$$

となることが知られている．（2.14）式を（2.13）式に代入することで，これを容易に確かめることができる．

方程式（2.14）の結果はガウス（Gauss）により既に知られていたものである．物理学を志ざす人のなかには上記の例はあまりにも抽象的すぎるかもしれない．しかし，簡単でエレガントなモデルが本質を理解するために非常に役に立つこと

は歴史上の数多くの例によって示されている．変換（2.6）は特異点近傍でのアインシュタインの重力方程式の解の解析にも最近使われている［56］．

次に詳しく解析する例も混合性をひき起こす簡単な変換の1つである．これは，少し修正することにより，物理学における多くの問題の典型ともなり得るので，きわめて教訓的である．

変数 x が領域 $0<x<1$ の間で変化するとして，次の変換を考えてみよう．

$$x_{n+1}=\{Kx_n\}, \tag{2.15}$$

ここで，K はこの問題のパラメータであり，$K>0$，とする．括弧は例（2.2）と同じく引数の分数部分を表わす．$K<1$ の場合，方程式（2.15）の括弧をはずすことができて

$$x_{n+1}=Kx_n=K^2x_{n-1}=\cdots=K^{n+1}x_0.$$

となる．これは x_0 の値に関係なく $n\to\infty$ で $x_n\to 0$ となる．$K=1$ では

$$x_{n+1}=x_n=\cdots=x_0,$$

であり，系には変化がない．

$K>1$ のときは，状況は全く異なる．参考文献［57～59］に示されているように，この場合には運動は混合性の性質を持つようになる．ここで，系のパラメータの値に従って運動が規則的となるか，ストカスティックとなるかのいずれかであるような系を見出したことになる．さて，方程式（2.15）を詳しく解析してみよう．ただし，ここでは $K\gg 1$ の場合のみを考える．これは，参考文献［57～59］で使われている方法より厳密さに欠ける定性的な方法ではあるが，教育的である．まず，相関関数

$$\mathscr{R}_n=\int_0^1(x_{m+n}-\langle x_{m+n}\rangle)(x_m-\langle x_m\rangle)dx_m\times\left[\int_0^1(x_m-\langle x_m\rangle)^2dx_m\right]^{-1},$$

を計算することから始めよう．ここで

$$\langle x_m\rangle=\int_0^1 x_m dx_m=\frac{1}{2},\quad \langle x_{m+n}\rangle=\int_0^1 x_{m+n}dx_m. \tag{2.16}$$

である．一見したところ，（2.16）の $\langle x_{m+n}\rangle$ の積分が dx_m に関してであることや，$\langle x_m\rangle$ と $\langle x_{m+n}\rangle$ とが等しくないことに疑問が生じる．これは，一般の場合には変換（2.15）が測度保存でないということから理解できる．この場合，リュービルの定理との類似性は存在せず，平均は定常的ではない．しかし，K が整数なら測度保存であり，$\langle x_{m+n}\rangle=\langle x_m\rangle$ となる．系のこの性質は後に分布関数を分析するときに証明するが，ここでは $\mathscr{R}_n$ の計算を続けよう．まず $\mathscr{R}_1$ から始める

と次式を得る [61],

$$\mathscr{R}_1=\frac{\langle(x_{n+1}-\langle x_n\rangle)(x_n-\langle x_n\rangle)\rangle}{\langle(x_n-\langle x_n\rangle)^2\rangle}=\frac{\langle x_{n+1}x_n\rangle-\langle x_{n+1}\rangle\langle x_n\rangle}{\langle x_n^2\rangle-\langle x_n\rangle^2},$$

ここで (2.15) 式を x_{n+1} に代入すると

$$\mathscr{R}_1=12\Big(\langle x\{Kx\}\rangle-\frac{1}{2}\langle\{Kx\}\rangle\Big).$$

となる. 簡単な積分の結果

$$\int_0^1 x\{Kx\}\,dx=\frac{1}{K^2}\int_0^K x\{x\}\,dx=\frac{1}{K^2}\sum_{n=0}^{K-\{K\}-1}\int_n^{n+1}x\{x\}\,dx$$

$$+\frac{1}{K^2}\int_{K-\{K\}}^{K}x(x)dx=\frac{1}{K^2}\sum_{n=0}^{K-\{K\}-1}\int_n^{n+1}x(x-n)dx$$

$$+\frac{1}{K^2}\int_{K-\{K\}}^{K}x(x-K+\{K\})dx=\frac{1}{4}+\frac{1+6\{K\}(\{K\}-1)}{12K}+O\left(\frac{1}{K^2}\right),$$

$$\int_0^1\{K(x\}\,dx=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{K}\right).$$

となり, これから近似的に

$$\mathscr{R}_1\approx C_1/K,$$

を得る. ここで, C_1 は1のオーダーの定数である. 同じようにして

$$\mathscr{R}_2\approx C_2/K^2.$$

が得られる. そこで, 任意の n に関して

$$\mathscr{R}_n\sim C_n(n)/K^n=C(n)\exp(-n\ln K), \tag{2.17}$$

となることが期待される. ここで $C(n)$ は ($K\gg1$ の場合には) 指数関数の係数因子で, n のゆっくり変化する関数である. しかしながら, 上述の議論で証明できることは K が整数の場合にのみ (2.17) 式が成立するということだけである. その場合には実際に

$$\mathscr{R}_1\approx\frac{1}{12K},\quad \mathscr{R}_{n+1}=\frac{1}{K}\mathscr{R}_n,$$

であり, 従って

$$\mathscr{R}_n\approx\frac{1}{12}\exp(-n\ln K). \tag{2.18}$$

が成立する.

K が非整数の場合には, 別のタイプの相関関数

$$\bar{\mathscr{R}}_n=2\pi\langle\exp[2\pi i(x_{n+m}-x_m)]\rangle. \tag{2.19}$$

を導入するのが得策である．後で論じるように，この型の相関関数は運動論的方程式の算出の際に使われるであろう．$K\gg 1$ の場合に $\mathscr{R}_n$ を評価しよう．任意の K の場合には，

$$\mathscr{R}_1=2\pi\int_0^1 dx\exp[2\pi i(x-\{Kx\})]=2\pi\int_0^1 dx\exp[2\pi i(1-K)x]$$

$$=\frac{i}{1-K}(-\exp[2\pi i(1-K)x])\sim\frac{1}{K}.$$

である．K が整数の場合には $\mathscr{R}_1$ は恒等的に0である．これは相関関数の特別な選び方に帰因している．そして，$K<1$ では $\mathscr{R}_1\sim 1$ である．

次に漸化式

$$\mathscr{R}_1\sim\frac{1}{K}\mathscr{R}_{n-1}\quad(K\gg 1). \tag{2.20}$$

を証明しよう．$\mathscr{R}_n$ は

$$\mathscr{R}_n=2\pi\int_0^1 dx\exp\left[2\pi i\left(\underbrace{x-\{K\{\cdots}_{n}\{Kx\}\underbrace{\cdots\}}_{n}\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{K}\int_0^K dx\exp\left[2\pi i\left(\frac{x}{K}\underbrace{-\{K\{K\cdots}_{n}\{x\}\underbrace{\cdots\}}_{n}\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{K}\sum_{m=0}^{K-\{K\}-1}\int_m^{m+1} dx\exp\left[2\pi i\left(\frac{x}{K}-\underbrace{\{K\{K\cdots}_{n-1}\{K(x-m)\}\underbrace{\cdots\}}_{n-1}\right)\right]$$

$$+\frac{2\pi}{K}\int_{K-\{K\}}^{K} dx\exp\left[2\pi i\left(\frac{x}{K}-\underbrace{\{K\{K\cdots}_{n-1}\{K(x-K+\{K\})\}\underbrace{\cdots\}}_{n-1}\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{K}\left(\sum_{m=0}^{K-\{K\}-1}\exp\left(2\pi i\frac{m}{K}\right)\right)\int_0^1 dy\exp\left[2\pi i(y-\underbrace{\{K\{K\cdots}_{n-1}\{Ky\}\underbrace{\cdots\}}_{n-1})\right]$$

$$+\frac{2\pi}{K}\exp\left(2\pi i\frac{K-\{K\}}{K}\right)\int_0^{\{K\}} dy\exp\left[2\pi i(y-\underbrace{\{K\{K\cdots}_{n-1}\{Ky\}\underbrace{\cdots\}}_{n-1})\right]$$

$$=\frac{2\pi}{K}\frac{1-\exp\left(2\pi i\dfrac{K-\{K\}}{K}\right)}{1-\exp\dfrac{2\pi i}{K}}\mathscr{R}_{n-1}+\frac{2\pi}{K}\exp\left(2\pi i\frac{K-\{K\}}{K}\right)\bar{C}_{n-1}(\{K\}),$$

と書ける．ここで

$$\bar{C}_n(z)=\int_0^z dy\exp\left[2\pi i\left(y-\underbrace{\{K\{K\cdots}_{n-1}\{Ky\}\underbrace{\cdots\}}_{n-1}\right)\right]\qquad(z<1).$$

と置いた．同様にして

$$\bar{C}_{n-1}(\{K\})\sim\frac{\alpha}{K}\bar{C}_{n-2}(\{K\{K\}\})+\frac{\beta}{K}\mathscr{R}_{n-2},$$

を示すことができる．ここで，α と β は1のオーダーの定数である．上記の表式から $\mathscr{R}_n$ を簡略化すると，

$$\bar{\mathscr{R}}_n\sim\frac{\{K\}}{K}\bar{\mathscr{R}}_{n-1}+\frac{2\pi}{K}\bar{C}_{-1}(\{K\}).$$

が得られる．そこで，(2.20) の漸化式は，最後の2式と，$\bar{C}_1\sim 1/K$ であることから証明される．また，上述の式から別の情報を引き出すこともできる．相関は係数 $\bar{C}(n)$ と

$$\mathscr{R}_n\sim\bar{C}(n)\exp(-n\ln K), \tag{2.21}$$

で関係づけられるが，$\bar{C}(n)$ は n より速く増大することはない．

方程式 (2.17) と (2.20) は K が大きいときの混合性の証明になっている．これはまた運動の本質的な特徴を表わす相関消滅時間 τ が次式で与えられることを意味する．

$$\tau=1/\ln K. \tag{2.22}$$

さらに，方程式 (2.22) は漸化式 (2.20) と一致していることがわかる．実際 (2.20) は

$$\bar{\mathscr{R}}_n\sim\bar{\mathscr{R}}_{n-1}\bar{\mathscr{R}}_1\sim\cdots\sim\bar{\mathscr{R}}_1{}^n, \tag{2.23}$$

の形に書ける．すなわち，$\bar{\mathscr{R}}_n$ は $\bar{\mathscr{R}}_1$ の積に分解できる．(2.23) 式は時間間隔を単位とするこの変換の各ステップでの値，$x_0, x_1, \cdots$ が統計的に独立であることを意味している．他方，$K\gg 1$ であるから $\tau\ll 1$ であり，したがって相関消滅時間は x の継続的な変化の時間間隔（2つの衝突の間の時間，つまり，1）より小さい．この条件は自動的に (2.23) のような相関分解の条件に帰着することが知られている．

方程式 (2.23) の結果から重要な結論が導びかれる．すなわち，(2.23) の関係と，その物理的内容から，$\tau\ll 1$ の場合は $\mathscr{R}_n$ を評価する必要はなく，$\mathscr{R}_1$ を見出すだけで十分であることがわかる．

さて，運動の安定性という観点から写像 (2.15) を解析しよう．写像 $\hat{T}$ を非常に短かい間隔 δx_0 に作用させると，この写像から

$$\delta x_1/\delta x_0=K \tag{2.24}$$

が示される．それゆえ，$K>1$ の場合は，写像 $\hat{T}$ は引き伸ばし写像であることがわかる．$\delta x_0\ll 1/K$ の場合を考えよう．これに n 回 $\hat{T}$ が作用すると

$$\delta x_n = K^n \delta x_0 = \exp(n \ln K)\delta x_0. \tag{2.25}$$

となる．(2.25) の表式は位相空間での局所不安定性の成長を表わしている．このとき，成長率は

$$h_0 = \ln K. \tag{2.26}$$

となる．これは 1.6 節で述べた

$$h_0 = 1/\tau \tag{2.27}$$

の等式が厳密に成立することを示している．非常に短かい間隔，$\delta x_0 \ll 1$ の中にある点を考えると，方程式 (2.25) から，その間隔上の点から出発した軌道は相互に離れ，単位間隔を均一に満たすような時間 n_0 が存在することがわかる．方程式 (2.25) で $\delta x_{n_0}=1$ とおいて n_0 を評価すると，

$$n_0 = \frac{\ln 1/\delta x_0}{\ln K} = \tau \ \ln \frac{1}{\delta x_0}. \tag{2.28}$$

が得られる．時間 n_0 の物理的意味は，定常状態が達成されるために必要な時間は n_0 であるということである．方程式 (2.22) と (2.26)～(2.28) を合わせると，この問題の特性時間のスケールの間に

$$\tau \ll T \ll \tau_0, \tag{2.29}$$

の関係があることがわかる．ここで $\tau_0 \equiv n_0$，$T=1$ である．(2.29) の不等式は運動論的理論（あるいは運動論的方法で処理できるような問題）において典型的なものである．(2.29) 式の時間の大小関係は，後に再び議論することになるだろう．

定常状態が達成されるまでの時間は，衝突の間の時間より長く，また衝突の間の時間は初期条件の記憶の消滅する時間より長い．時間 τ については，取り扱かう問題に応じて色々な意味がつけられるが，ここでの意味，すなわち，初期状態の記憶の消滅時間というのは，問題の本質を表わしている．実際，既に述べたように，衝突後の状態の記憶は次の衝突によって消滅するが，このことは方程式 (2.23) で表わされている．

前述の結論は，写像 (2.15)（これ以後は，引き伸ばし写像と呼ぶ）が，いかに豊富な物理的内容を含んでいるかを示している．実際，この写像で解析されるべき豊富な内容は，まだ調べつくされていない．議論を進める前に，この写像にこれだけ重きを置く理由を明らかにしておこう．局所不安定性の成長は，位相空間中の軌道の間の広がりと深く関連している．この広がりの過程は非常に短かい間隔が広がることを意味する．明らかに，引き伸ばし係数が定数の場合が最も簡単な場合である．そして，上であげた例がまさにこの場合であり，方程式 (2.

24）との類推から

$$\delta x_{n+1}=K\delta x_n,$$

と書くことができる．したがって，パラメータ K が引き伸ばし係数となっている．引き伸ばし係数は問題の特性時間を完全に決定する．

ここで，混合性の条件の下での写像（2.15）の分布関数 $\rho(x)$ の解析に移ろう．以下の結果はレンイ（Renyi）[59] により求められたものであるが，ここでは物理学の典型的な手法で論じよう．

まず，$x_n=y$，$x_{n+1}=x$ という表記法で写像（1.15）を

$$x=\hat{T}y=\{Ky\}.$$

と書き直す．y の区間（0,1）は次の区間に分割しよう．

$$\Delta_1=\left(0,\ \frac{1}{K}\right),$$

$$\Delta_2=\left(\frac{1}{K},\ \frac{2}{K}\right),\ \cdots,\ \Delta_{[K]}=\left(\frac{[K]-1}{K},\ \frac{[K]}{K}\right),$$

$$\Delta_{[K]+1}=\left(\frac{[K]}{K},\ 1\right),\ [K]\equiv K-\{K\}.$$

上記の各区間 $\Delta_i(i=1,2,\cdots[K])$ の中の点は変換 $\hat{T}$ によって区間（0,1）上に写像される．言い換えると，変数 y の区間 $(0,[K]/K)$ は変数 x の区間（0,1）に写像される．このことは，もし $[K]=K$，すなわち，K が整数ならば，写像 T が測度保存（位相体積を保存する）写像であることを示している．

また，y が次のいずれかの値をとる場合でも，この写像によって，系は点 $x\in(0,1)$ となる．

$$\frac{x}{K}\in\Delta_1,\quad \frac{x+1}{K}\in\Delta_2,\ \cdots,$$

$$\frac{x+[K]-1}{K}\in\Delta_{[K]},\quad \frac{x+[K]}{K}\in\Delta_{[K]+1}. \tag{2.30}$$

したがって，定常の場合には系が点 x にある確率は，方程式（2.30）の各点にある確率の和に等しい．しかしながら

$$x\in(0,\ \{K\}), \tag{2.31}$$

の x の値のみを像とするような逆像 y の区間 $\Delta_{[K]+1}$ が存在するために問題は複雑になる．これにたいして x が

$$x\in(\{K\},\ 1), \tag{2.32}$$

の範囲にあると，その逆像は区間

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots,\ \Delta_{[K]},$$

のいずれかである．そこで，(2.32) 式の x の逆像は $y\in(\{K\}/K,\ [K]/K)$ に対応する．さて，方程式 (2.31) と (2.32) の領域の確率密度をそれぞれ $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ とする．前述の議論から

$$\rho_1(x)=\frac{1}{K}\left(\rho_1\left(\frac{x}{K}\right)+\rho_1\left(\frac{x+1}{K}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\rho_1\left(\frac{x+[K]-1}{K}\right)+\rho_2\left(\frac{x+[K]}{K}\right)\right),\quad 0<x<\{K\},$$
$$\rho_2(x)=\frac{1}{K}\left(\rho_1\left(\frac{x}{K}\right)+\rho_1\left(\frac{x+1}{K}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\rho_1\left(\frac{x+[K]-1}{K}\right)\right),\quad \{K\}<x<1, \tag{2.33}$$

と書くことができる．ここで $1/K$ は線分の変換 ($dx=Kdy$) のヤコビアンである．また，K は

$$K\{K\}\geqslant[K], \tag{2.34}$$

の領域内にあると仮定する．この (2.34) の条件が成立していないと (2.33) の第2の方程式も違ってくる（右辺の関数 ρ_1 の一部を ρ_2 で置き換えなければならない）．

ここで，$\{K\}=0$ の時，区間 (2.31) はなくなり，$\rho(x)$, $0<x<1$, にたいする方程式は

$$\rho(x)=\frac{1}{K}\left(\rho\left(\frac{x}{K}\right)+\rho\left(\frac{x+1}{K}\right)+\cdots+\rho\left(\frac{x+K-1}{K}\right)\right)\quad(\{K\}=0),$$

となる．これは自明な解，$\rho=1$, を持つ．また，$K\gg1$ の場合にも (2.33) の系は近似的に同じ解を持つことが容易にわかる．

$$\rho=1+O(1/K). \tag{2.35}$$

厳密解の構造は非常に複雑であるが (2.35) の近似的分布，すなわち x に関しての一様分布，は物理的応用にとっては十分なものであろう．しかし，$\rho(x)$ のより正確な描像として，レンイ [59] により発見された特例を与えることが可能である．$K=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ としよう．このとき，$1<K<2$ であり，

$$K\{K\}=1. \tag{2.36}$$

となる．このとき，(2.33) 式は

$$\rho_1(x)=\frac{1}{K}\left(\rho_1\left(\frac{x}{K}\right)+\rho_2\left(\frac{x+1}{K}\right)\right),$$
$$\rho_2(x)=\frac{1}{K}\rho_1\left(\frac{x}{K}\right).$$

となる．これから ρ_2 を消去すると

$$\rho_1(x)=\frac{1}{K}\rho_1\left(\frac{x}{K}\right)+\frac{1}{K^2}\rho_1\left(\frac{x+1}{K^2}\right),$$

となる．この方程式の解は

$$\rho_1=C \qquad (0<x\leqslant(\sqrt{5}-1)/2),$$
$$\rho_2=C/K \qquad ((\sqrt{5}-1)/2<x\leqslant 1),$$

と与えられることは，(2.36) の条件を適用することにより，容易に確かめられる．ここで C は規格化定数である．この例は $\rho(x)$ が一般的には非常に複雑な (非解析的) 性質を持っていることを示している．しかし，$K\gg 1$ では全ての特異性は，方程式 (2.35) に従って，$1/K$ のオーダーの量であらわされるために無視することができる．

これまで述べてきた2つの例には以下の様な特筆すべき性質がある．運動は「時間の矢印の向きでは」一価であるが，「時間の矢印の逆向きでは」一価でない．この性質は，いわゆる「フラクタル」操作の結果出現したものと考えられる．これ以後，この性質が物理学のいろいろな問題に表われることを見てゆくことになろう．そこで現実の問題は，不可逆性，もしくは不明瞭性のタイプによって特徴づけられるといって良いだろう．このことと，通常の不可逆性の概念とを混同すべきではない．もし，時間の矢印を反転したとき同一の軌道を逆向きにたどることができるなら運動は可逆である．しかし，上で議論した変換の例において，系の運動がどこから出発したかを特定することが不可能である．つまり，ある瞬間の系を定めることが不明瞭になる．この不明瞭性の性質が，ストカスティシティの発生に必要条件となる可能性は否定できない．この不明瞭性が $K>1$ で現われることを考慮するとこの可能性は益々強くなるが，残念ながら，この不明瞭性についての説得力のある結論はまだ得られていない．

2. 2 ストカスティシティの基準

シナイの基準，2次元引き伸ばしの例，のこぎり刃型 (Saw-Tooth) 変換，アノソフ流 (Anosov flow)

混合性 (ストカスティシティ) が出現する条件を決めるために，前節では相関関数の挙動から議論した．この計算が可能であれば，前節の方法に従って混合性

の条件を決めることができる．しかし，この方法を実行するためには，ストカスティシティの基準だけでなく，相関関数の構造に関連した多くの付加的な情報も見出さなければならない．そこで，与えられた運動方程式からストカスティシティの基準を直接に決定できないだろうかという問題が生じる．この直接的な基準はシナイ [39] によって示された（注釈1参照）．

ここでは，シナイの基準の定性的記述にとどめておこう．まず，$x\equiv(x_1, \cdots, x_N)$ が全ての力学変数を表わし，運動方程式は写像の形式で，

$$\hat{T}x=f(x),$$

で与えられるものとしよう．すなわち，

$$\hat{T}(x_1, \cdots, x_N)=(f_1(x_1, \cdots, x_N), \cdots, f_N(x_1, \cdots, x_N)).$$

である．各点 x で，行列

$$A(x)=\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|.$$

を考え，任意のベクトル $a=(a_1, \cdots, a_N)$ を取り，関係式

$$\sigma(a)=\frac{|A(a)a|^2}{|a|^2},$$

を考察しよう．ここで $|x|^2$ はベクトル x の長さの2乗である．もし，$\sigma(a)>1$ ならベクトル a は引き伸ばしであり，$\sigma(a)<1$ なら縮みであるという．今，位相空間内の1点を座標原点とし，そこから状態として可能な全ての点に線を引く．全ての引き伸ばしベクトルは円すい L^+ の中に，縮みベクトルは円すい L^- の中に入るとする．

シナイのストカスティシティの基準は次のように定式化できる，もし，

$$A(x)L^+(x)\subset L^+(\hat{T}x),$$
$$A^{-1}(x)L^-(x)\subset L^-(\hat{T}^{-1}x), \tag{2.37}$$

が成立するならば，その系の運動は混合性になる．条件式（2.37）の幾何学的解釈は容易である．まず最初の条件を見てみよう．$L^+(x)$ は引き伸ばしベクトルの円すいであり，$L^+(\hat{T}(x))$ はベクトルの像，すなわち写像を行なった後のベクトルの引き伸ばし円すいである．L^+ に作用する $A(x)$ は演算子 $\hat{T}$ による円すい L^+ の（円すいの境界をも含め）微小変換と同等である．そこで，条件式（2.37）の第1式は写像 $\hat{T}$ が引き伸ばしベクトルの円すい L^+ の全てを変換したものが，写像を行なった後の引き伸ばしベクトルの円すいの中におさまるという意味である．同様に，（2.37）の第2式は縮みベクトルの変換で，縮みベクトルは引きのばしベクトルの円すいの中には入らない，ということを意味している．

シナイの基準の応用例を2つ考えてみよう．まず，x_1，x_2 が循環変数であるとする．また，写像 $\hat{T}$ は

$$\hat{T}(x_1,\ x_2)=(\{mx_1+nx_2\},\ \{px_1+qx_2\}), \tag{2.38}$$

の形をしているとする．ここで，$m,\ n,\ p,\ q>0$ で $mq-np=1$ である．この写像は，写像（2.15）の2次元への拡張である．この場合，行列 A は

$$A=\begin{Vmatrix} m & n \\ p & q \end{Vmatrix}$$

で，x に依存しない．ここで，$m,\ n,\ p,\ q$ という数は行列 A の固有値 λ_1，λ_2 が異なる実数となるように選ばれた数である．そのとき，$\lambda_1\equiv\lambda>1$，$\lambda_2=1/\lambda<1$ となる．さて，行列 A を対角化するような表示をとり

$$A=\begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{Vmatrix}.$$

となったとする．この表示ではベクトル $a=(a_1,\ a_2)$ は

$$Aa=(\lambda a_1,\ \lambda^{-1}a_2)$$

に変換される．ここで2つの円すい L^+，L^- の境界にたいする方程式は

$$|A\bar{a}|^2=|\bar{a}|^2,$$

もしくは

$$(\lambda\bar{a}_1)^2+(\bar{a}_2/\lambda)^2=\bar{a}_1^2+\bar{a}_2^2.$$

の形になる．この解は

$$\bar{a}_2/\bar{a}_1=\pm\lambda.$$

である．すなわち，引き伸ばし円すいは，$a_2/a_1<\lambda$ のベクトルから成り，縮み円すいは $a_2/a_1>\lambda$ から成る（図 2.1）．L^+ の境界はベクトル $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ で決められる．像 AL^+ の境界は$(\bar{a}_1, \bar{a}_2)=(\lambda\bar{a}_1, \lambda^{-1}\bar{a}_2)$ となり，円すい AL^+ の境界の方程式は

$$\lambda^{-1}\bar{a}_2/\lambda\bar{a}_1=\pm 1/\lambda.$$

となる．したがって，

$$|\overline{\overline{a_2}}/\overline{\overline{a_1}}|<\lambda=|\overline{a_2}/\overline{a_1}|.$$

となり，円すい $AL^+(x)$ は円すい $L^+(\hat{T}x)$ の中に含まれ（図2.2参照），条件式（2.38）の第1式は満足される．（2.37）式の第2式も同様に満足されることが示される．（練習問題として，2.1で議論した写像，$\hat{T}(x)=\{1/x\}$ と，$\hat{T}x=\{Kx\}$，$K>1$ の写像のストカスティシティをシナイの

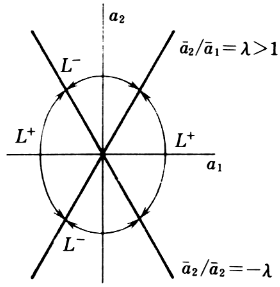


図 2.1 2次元引き伸ばし写像での，縮みベクトルと引き伸ばしベクトルの円錐．

基準の方法で確かめよ.)

ここで，上述のストカスティシティの基準から引き出せる情報と，(2.38) 式から引き出される情報とを詳細に分析してみよう．行列 A は座標に依存しないため，ベクトル $x=(x_1,\ x_2)$ に写像を行なうと，x_1 の方向に λ 倍だけ引き伸ばされ，x_2 の方向には $1/\lambda$ 倍だけ縮められる．すなわち，座標軸の1つの軸に沿って変換 (2.38) 式は写像 (2.15) 式と同じ効果を持ち，不安定性が生じるような引き伸ばし写像になる（これは，相異なる実数の固有値，λ_1，λ_2 の存在と等価である)．行列 A は任意の時刻に同じ変換で対角化されるため，x_2 に沿っての縮みは x_1 に沿っての引き伸ばしに影響を与えない．言い換えると，引き伸ばしだけが起きるベクトルの自由度のみを選択することができる．それで写像 (2.15) 式との類推がより鮮明になっている．

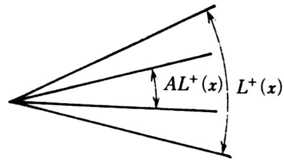


図 2.2　引き伸ばしの基準の例.

一般的な場合には，引き伸ばしと縮みの方向に，「混合」が存在するため，上記のようには簡単でない．すなわち，行列 A は定数でもないし，いつも同じ変換で対角化されるとは限らない．つぎに，厳密には何も証明されていない $A\neq$ 定数の一般的な場合に $A=$ 定数の場合の厳密な結果を，適用するという議論に踏み込んでみたい．しかし，この場合の十分詳細な議論は他の機会に譲り，ここでは状態のベクトルの1つの座標に沿って引き伸ばしがあるときにストカスティシティが出現するという場合の定式化に限ろう．

この例として，次ののこぎり刃型変換

$$
\begin{aligned}
&(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)=\hat{T}(x_1,\ x_2),\\
&\bar{x}_1=\{x_1+Kf(x_2)\},\\
&\bar{x}_2=\{x_2+\bar{x}_1\}=\{x_2+x_1+Kf(x_2)\},
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

を考えよう．ここで

$$
\frac{df(x)}{dx}=\begin{cases}+1, & 0<x<1/2,\\ -1, & 1/2<x<1.\end{cases}
$$

であるとする．第4章の非線型振子の議論において (2.39) 式の型の変換が現われることを見るであろう．そこにでは，$f(x)$ はなめらかな関数で，解析的な構造を持っている．

(2.39) 式の問題はオセレデッツ (V.I. Oseledets) により研究された（著者はこのことについてはシナイから知らされた)．(2.37) 式の基準をこれに適用しよう．まず，$f'(x_2)=1$ の領域を考えよう．その場合

$$A=\left\|\begin{matrix}1 & K\\ 1 & 1+K\end{matrix}\right\|. \tag{2.40}$$

となる．この先の解析は写像（2.38）式に類似している．唯一の違いは，固有値 λ_1，λ_2 が具体的に決められることである．λ に関する方程式は，（2.40）式から

$$\lambda^2-\lambda(2+K)+1=0,$$

となり，その解は

$$\lambda_{1,2}=1+{}^1/_2K\pm({}^1/_4K^2+K)^{1/2}$$

となる．つまり，不安定性（$\lambda_1>1$，$\lambda_2=1/\lambda<1$）は $K>0$ か $K<-4$ の場合に存在する．$f'(x_2)=-1$ の場合も同様に解析できて，$K<0$ か $K>4$ で不安定性が起きる．そこで不安定性と，それに伴なうストカスティシティは $|K|>4$ の場合に，$0<x<1$ の全ての領域で存在する．この例は，いわゆるアノソフ流（Anosov flow）の類に属し，モデルの「形式的」議論は完結している（注釈 2 参照）．

2. 3 完全剛体球の衝突

クリロフの解析，負の曲率の役割り，モデルの解析における困難

クリロフは，混合性の出現可能性を基礎として現実の物理系の研究を行なった．そしてそれを統計力学の基礎の発展に結びつけた最初の研究者であった．このような系として，クリロフ [33] は，t_0 という特性時間毎に衝突する剛体球の集合を扱かった．それは，平面上の運動で，衝突は完全に弾性的というものであった．

剛体球の半径の 2 倍の円で散乱される質点の運動（軌道）を考えると，この問題は，2 つの衝突球の問題と同等であることが知られている．軌道のパラメータと散乱中心の座標の間の関係式は図 2.3 から得られる．散乱の中心を座標系（x, y）の原点に置き，球面上の衝突する点はパラメータ（R, θ）で表わす．軌道の球への入射角を α とし，質点の初期座標（x, y）は任意に与えられると仮定する．衝突点（R, θ）と質点の初期座標との間には

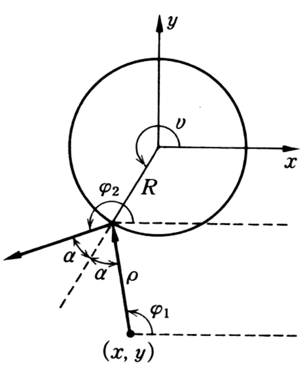


図 2.3 球による軌道の散乱.

$$x+\rho\cos\varphi_1=R\cos\theta,\ \ y+\rho\sin\varphi_1=R\sin\theta, \tag{2.41}$$

の関係がある．ここで，角度 φ_1 は図 2.3 に与えた．入射角と反射角とは等しいので

$$2\alpha+\varphi_2+\pi-\varphi_1=2\pi,\quad \alpha+\varphi_2=\theta,$$

という関係が得られる．これから α を消去すると

$$\varphi_1+\varphi_2+\pi=2\theta,$$

という関係が得られる．ここでの目標は軌道の引き伸ばしパラメータを決定する $\partial\varphi_2/\partial\varphi_1$ という量を見出すことである．φ_1，φ_2 は散乱前後の角度であるから，引き伸ばしの条件

$$|\partial\varphi_2/\partial\varphi_1|>1 \tag{2.42}$$

が満足されるとき，ストカスティックな不安定性，すなわち初期状態の小さなずれに関する不安定性が成長することが分かる．そうすると，軌道の位相は時間的に乱雑な振舞いをし，系は統計的な方法で記述できるようになる．

ここで，φ_1 と φ_2 と θ の関係から

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1}=2\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}-1,$$

が得られる．x, y と φ_1 とが互いに独立な量であると仮定し，方程式 (2.41) から

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}=\frac{\rho\sin\varphi_1-\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi_1}\cos\varphi_1}{R\sin\theta},$$

となる．次に $\partial\rho/\partial\varphi$，を計算しよう．方程式 (2.41) の両式を2乗し，それらを加え合わせると

$$x^2+y^2+2\rho(x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1)+\rho^2=R^2,$$

となる．この結果を φ_1 に関して微分し，x, y を式 (2.41) を使って消去すると

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_1}=-\rho\tan(\theta-\varphi_1),$$

を得る．$\partial\rho/\partial\varphi_1$，$\partial\rho/\partial\varphi_2$ の表式から，最終的に

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1}=\frac{\rho}{R}\,\frac{2}{\cos(\theta-\varphi_1)}-1,$$

となる．$\cos(\theta-\varphi_1)\leq 1$ であるから，引き伸ばしの条件，(2.42) は

$$K=\rho/R>1, \tag{2.43}$$

である．ここで自由行程の長さは ρ に等しい．(2.42) と (2.43) の表式は方程式 (2.24) に類似している．このことは引き伸ばし変換，(2.15) の場合の変数 x と位相変数 φ の間に類推が成立することを意味している．したがって，この場

合の相関関数は

$$\mathcal{R}_n \sim K^{-n} = \exp(-n \ln K)$$

という形に書けることになる．離散時間 (n) を連続時間 ($t=nt_0$) に変えると

$$\mathcal{R}(t) \sim \exp\left(-\frac{t}{t_0} \ln \frac{\rho}{R}\right). \tag{2.44}$$

となる．すると，特性的な相関消滅時間は

$$\tau = t_0 / \ln \frac{\rho}{R}. \tag{2.45}$$

となる．ここで，この巧妙な手法の各ステップを検討し，局所不安定性をもたらした物理的原因を見出すことは有益であろう．隣接する点から，ほぼ同一方向に放射された2本の軌道の軌跡を追跡してみよう（図2.4参照）．この軌道は球面で反射された後は広がってゆく．衝突の数が増すと広がりの度合いは成長し，その軌道が元は隣接していたことを「忘れる」までになる．軌道の混合性が起きた主な要因は，軌道の反射面が散乱型の面，すなわち，負の曲率の面であったという事実にある．このことから，物理学において負の曲率の領域を運動する系は特殊な役割りを持っていることがうかがわれる．これについては次の節でより詳細に分析する（注釈3参照）．ここでは，これまでの衝突球の解析の欠点を指摘する必要がある．実際，ここでの取り扱いでは重要な力学的側面を無視し，1つの軌道の固定された球による散乱だけを扱かった．すなわち，これらの散乱体の運動は計算上無視された．そのために，自由行程と衝突間の時間という概念を人為的に導入せざるを得なかった．クリロフの議論は物理的立場からは極めて満足すべきものと思われるが，系の力学的発展を考慮に入れて剛体球から構成される気体の混合性の条件に関するより厳密な結果を得ることが可能か否かという疑問が生じる．残念ながら，この疑問は数学者によく見られるたんなる「厳密さへの忘想」ではない．幾つかの例によって，数個の衝突球に力学的要素を導入することで新しい物理的現象が現われることが定性的に示されている．

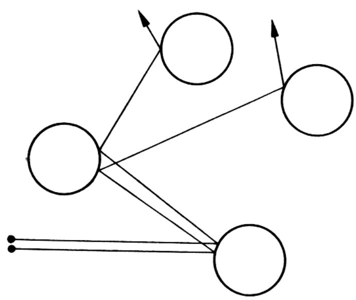


図 2.4　球により散乱された軌道の局所不安定性

2.4　散乱ビリヤード（シナイのビリヤード）

剛体円盤の気体についてのシナイによる解析，散乱ビリヤードの問題，散乱ビリヤードの同型性

剛体球からなる気体の混合性というクリロフの問題のより進んだ解析はシナイ[61, 62]によって成し遂げられた．シナイは平面上で弾性的に衝突する円盤の問題を取り扱かった．最も簡単な場合は，平面上に2つの円盤があり，1つの円盤が固定されている座標系で扱う場合である．前節と同様に固定円盤を，2倍の半径の円盤で置き換えて，動く円盤を質点で置き換える（図2.5）．これにより，問題は散乱ビリヤードのテーブルの上の質点の問題に帰着する．この場合は混合性がおこることが厳密に証明できる．そこで，シナイは混合性に関する結果を，相方の円盤が自由に動くことができる場合に拡張した．しかしながら，その場合に解を得るには莫大な努力が必要であることが判明した．

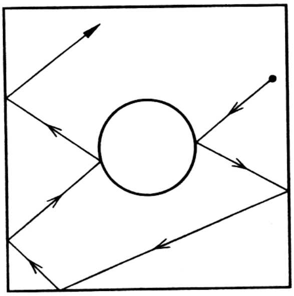


図 2.5　最も単純なシナイのビリヤード

円盤の数が任意である場合にこの問題の解を拡張することは極めて困難であるが，物理的観点から興味ある新しい研究対象がシナイの分析結果から見出されることがわかった．それはいろいろの型の散乱ビリヤードである．図2.6，図2.7は“星型”と“キャタピラー”型のビリヤードのテーブルの例である．図2.6と2.7のビリヤードの粒子の運動は空洞中や特定の型の導波管中の波動場の解析にも現われることを注意しておく．前に述べたように(1.6節)，異なる型のK系でも，もしそれらが同じKエントロピーを持つならば，

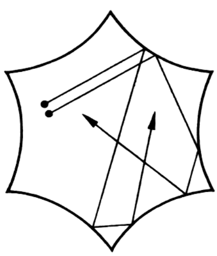


図 2.6　“星型”ビリヤード

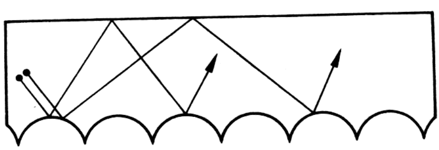


図 2.7　“キャタピラー”型ビリヤード

互いに同型である．後で議論するように，この同型性はストカスティシティの生じる他の物理系に適用することができる．軌道の引き伸ばしパラメータ K の値が大きい程，すなわち局所不安定性の成長率が大きい程，同型性が良く成りたつ．この場合，K の値が同じ系の軌道の振舞いを支配する法則は近似的に同じである．散乱ビリヤードの問題はこの場合に属している．このことは，物理学における多くの問題の解析はビリヤードの特性の解析と同等であることを示している．後の章で，この同型性がいかに有効に使われるかを示すことにする（ストカスティックなビリヤードの問題で必要な事柄は付録1で与える）．

第2章に関する注釈

1. 以下で述べるストカスティシティの基準の考え方はアノソフ（Anosov）とシナイによって，多くの具体的な問題に関して考えだされたものである［63, 39〜41］．以下の議論において，この基準に物理学者が興味を持つ理由を述べよう．大事な点は，シナイの基準は概して現実の物理的問題に厳密に成立するものではない（後に示す）ということである．しかしながら，この基準の拡張も存在し，それも厳密には証明されていないが，大体正しそうである（これも後で明らかになる）．この基準は極めて単純であり，この種の問題を考察する物理学者にとって「取り扱い易い形」になっていることから，シナイの基準を適当に修正したものは非常に有効なものになっている．この基準の証明の主要なアイデアと簡単な紹介については参考文献［13］を見られたい．

2. 「形式的」モデルに触れておこう．それは，アノソフにより導入された，いわゆるアノソフ流（Anosov flow）である．（［40］，参考文献［41, 44］も参照）．アナゾフ流の簡略化した定義は，位相空間のどの点でも，その任意の近傍での軌道の局所的挙動が双曲型特異点の近傍での局所的挙動と同じであることを主張することに相当する．変換（2.38）式と（2.39）式が，もし行列 $\boldsymbol{A}$ がどこでも2つの異なる実数の固有値を持つなら，すなわちストカスティックな不安定性の条件のもとでは，アノソフ流の一つの例を与えていることに注意しよう．物理的立場から，ハミルトニアン系の任意の（位相空間での）局所不安定性は双曲型特異点近傍でのみ起きているのは明らかである．そのため，どの場所でも双曲型特異点近傍のように振舞うというアノソフ流は最大に不安定な系である．アノソフ流のより重要な性質をあげると，以下のようになる．

(i) アノソフ流はエルゴード的で，その運動は混合性を持つ．

(ii) アノソフ流に摂動を加えてもアノソフ流を生成する．すなわち，アノソフ流となる系の性質は摂動にたいして過敏でないということである．

(iii) アノソフ流の概念は非ハミルトニアン系にも（ある程度複雑さを伴うが）一般化可能である．

3. 負の曲率空間の測地線の混合性に関する厳密な結論がホップ（Hopf）［32, 64］によ

り最初に得られた．これが剛体球の気体モデルに関するクリロフの解析の出発点でもあった．負の曲率空間の測地線の，更に進んだ解析はアンソフとシナイにより行なわれた［63, 40, 41］．

3章　粒子のストカスティック加速（フェルミ加速）

粒子のストカスティック加速は局所不安定性のエレガントで，かつ比較的簡単な例の1つである．この機構はフェルミ［65］によって，宇宙線のなかの高速粒子の起源を説明するために示唆されたものである．フェルミはランダムに動いている星間の磁気雲と衝突する荷電粒子は平均して加速を受けるに違いないと考えた．もし，その雲を非常に大きな質量を持った巨大物体とみなすなら，加速の原因は以下のように解釈できる．各衝突において粒子は，雲が粒子に近づくか遠ざかるかによって，エネルギーを得たり，失なったりする．もし，粒子の衝突する巨大物体の速度がランダムに分布していれば，1つの方向に動く粒子の数はそれと逆方向に動く粒子の数に等しい．このことは，粒子に向かってくる物体との衝突の数の方が多いことを意味する．なぜなら，そのような衝突の方がより頻発におこるためである．それゆえ，粒子はエネルギーを損失することより得ることの方が多く，これによってフェルミ加速と呼ばれる実質的な加速がおこる．

しかしながら，実際の条件では巨視的に大きな雲の運動は純粋に力学的（規則的）である．そこでフェルミ加速が，先験的に雲にランダムな速度を与えることなく，現われるかどうかという疑問が生じてくる．ここで，ストカスティシティの発生の問題に直面する．このことが本章の主題となる．

3.1　確率論的加速の機構

ウラム（Ulam）モデル，写像の方程式，加速の基準，加速の運動論

前述のフェルミ加速がどのように起きるかという問題に関連して，ウラムは2つの水平壁（そのうちの1つは周期的に振動する）の間を動く粒子（ボール），という簡単なモデルを示唆した．ウラムのこのモデルの数値解析では背定的な結果は得られず，加速は見出だされなかった．しかし，この仕事はより詳細な解析の刺激となり，多くの人により問題は解かれた［60，67］．

壁の1つが振幅 a で（図 3.1）振動し，壁の間の最小間隔が l であると仮定す

る．重力は無視して，壁と粒子の衝突は完全に弾性的であるとする．n 回目の衝突の「位相」，ξ_n を

$$\xi_n=\{t_n/T\},\quad 0<\xi<1, \tag{3.1}$$

と定義しよう．ここで t_n は n 回目の衝突の時刻であり，T は下の壁の振動の周期である．$x(t)$ を時刻 t における振動する壁の（上向きに測った）座標の値とする．x が t に放物型に依存すると仮定する．

$$x(t)=V_0T\xi(1-\xi), \tag{3.2}$$

ここで V_0 は速度の次元を持つパラメータである．$x(0)=x(T)=0$ であり，$x\left(\frac{1}{2}T\right)=a$ であるとすると，方程式 (3.2) より

$$T=4a/V_0 \tag{3.3}$$

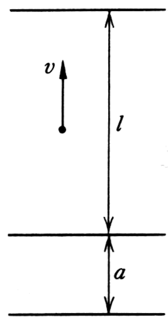


図 3.1　2つの壁の間を運動する粒子．下の壁は振幅 a で振動している．

となる．また下壁の速度は

$$V(t)=V_0(1-2\xi). \tag{3.4}$$

である．方程式 (3.1)～(3.4) は下壁の運動を完全に記述している．ここで，$v(t)$ が粒子の速度を表わし，v_n を t_n という瞬間に衝突する粒子の直前の速度とする．$a/l\ll 1$ と仮定すると，以下の有限差分方程式

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=v_n+2V(t_n)=v_n+2V_0(1-2\xi_n),\\ \xi_{n+1}&\approx\left\{\xi_n+\frac{2l}{v_{n+1}T}\right\}=\left\{\xi_n+\frac{lV_0}{2av_{n+1}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

が成立する．写像 (3.5) の第1式は厳密に成立し，第2式では $\sim a/l$ のオーダーまで残すという近似が使われている．(3.5) 式から

$$\frac{\partial(v_{n+1},\ \xi_{n+1})}{\partial(v_n,\xi_n)}=1.$$

は容易に確かめられる．それゆえ，変換 (3.5) は位相体積を一定に保ち，変数 $(v,\ \xi)$ は正準共役な量となる．簡単のために

$$V_0\ll v \tag{3.6}$$

を仮定して，方程式 (3.5) を

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=v_n+2V_0(1-2\xi_n),\\ \xi_{n+1}&\approx\left\{\xi_n+\frac{V_0}{2av_n}-\frac{lV_0^2}{av_n^2}(1-2\xi_n)\right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

という形に書き直す．不等式 (3.6) より，変数 v は衝突でわずかに影響を受けるだけだが，位相 ξ は非常に大きく変化する．この後者の変換が，第2章で取扱かった引き伸ばしの変換になっていることは明らかである．(3.7) 式から

$$\left\| \frac{\delta\xi_{n+1}}{\delta\xi_n} \right\| = \left\| 1 + \frac{2lV_0^2}{av_n^2} \right\|,$$

と書くことができる．この表式から，ストカスティシティが出現する条件は

$$K = \frac{2lV_0^2}{av_n^2} \gtrsim 1 \tag{3.8}$$

で与えられる．逆に $K<1$ という条件は安定性あるいは準周期運動（quasiperiodic motion）の条件となる．方程式（3.8）に従えば（3.6）式の l/a という比が十分に大きいとき，ストカスティシティが成長する．これは振動壁の振幅が十分に小さい場合である．（3.8）の評価式は，加速された粒子の速度の上限

$$v \lesssim (2lV_0^2/a)^{1/2} \equiv v_0. \tag{3.9}$$

も与えている．ここで，いくつかの本質的な留意事項を述べておく．それは，ここでの解析が厳密でなかったことに帰因するものである．まず，ストカスティシティの境界を定める $K\sim1$，あるいは $v\sim v_0$ という関係はどちらかというと便宜的なものということである．実際には運動が極端に複雑になる遷移領域（これは小さい必要はなく，v_0のオーダーにもなり得る）が存在する．後でこの遷移領域をより詳しく，より一般的な場合に解析する．ここでは数値解析のデータから得られる定性的議論にとどめておこう（注釈1参照）．大事な点は，遷移領域に粒子は入り得るが，そこにとどまる確率は小さい．もし，この領域を無視すると，境界 v_0 は粒子が $v>v_0$ の領域へ流れることにたいして，反射「壁」のように作用することになる．

ここでストカスティシティの領域で粒子の速度分布関数，$f(v,t)$，を導入する．ここでの規格化条件は

$$\int_0^{v_0} f(v,\ t)\,dv \sim 1, \tag{3.10}$$

である．境界条件は，境界 $v=v_0$ を越えるような粒子の流れ $J(v)$ がないとして

$$J(v_0) \approx 0. \tag{3.11}$$

とおく．次に行なうべきことは，ストカスティシティの領域での分布関数 $f(v,\ t)$ を見出すことである．変換の方程式（3.7）から，どのようにして，$f(v,\ t)$ を直接的に導くことができるかみてみよう．（3.7）式が表わす系は以下のような（2.1節で導いたものと類似の）特性時間をもつ．まず．粒子と動く壁との衝突が繰り返される時間間隔，τ_s，で，これは（$\frac{a}{l}$ の範囲で），

$$\tau_s = 2l/v \tag{3.12}$$

と与えられる．また，

$$\tau_c = \frac{\tau_s}{\ln K} = \frac{\tau_s}{\ln(2lV^2/av^2)} \tag{3.13}$$

で表わされる τ_c は位相 ξ の相関消滅時間を意味する．最後は速度の平衡分布 $f_0(v)$ が達成されるまでの時間 τ_d であり，これから求める．ストカスティシティの大きい領域においては $K \gg 1$ であり，方程式 (3.13) から $\tau_c \ll \tau_s$ である．従って最初に位相の平衡分布，$\rho(\xi)$，が達成される．一回の衝突での速度変化は方程式 (3.6) より

$$\Delta v = 2V_0(1-2\xi) \ll v, \tag{3.14}$$

の不等式を満足することから，$f(v, t)$ に関して，フォッカー－プランク－コルモゴロフ (Fokker-Planck-Kolmogorov) の拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}(Af) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}(Df), \tag{3.15}$$

が成立する．ここで係数 A，D は

$$A = \left\langle \frac{\Delta v}{\tau_s} \right\rangle, \quad D = \left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\tau_s} \right\rangle \tag{3.16}$$

と定義される．ここで ⟨……⟩ は位相に関しての平均である．衝突が力学的平衡の原理もしくは運動の微視的可逆性の原理を満足する場合には，方程式 (3.15) を簡略化することができる．今の例の場合にはこれが満足されるため，拡散方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(D\frac{\partial f}{\partial v}\right), \tag{3.17}$$

の形になり，各係数の間には

$$\left\langle \frac{\Delta v}{\tau_s} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\tau_s} \right\rangle \tag{3.18}$$

の関係がある．

ここで，係数 A と D を計算し，方程式 (3.18) が実際に成立していることを示そう．方程式 (3.14) から多数回の衝突において速度の変化は無視できる程小さいので，(3.8) の引き伸ばしのパラメータは $K \gg 1$ のときは近似的に一定とみなせる．そこで ξ に関する (3.7) の第2式は第2章で論じた変換 $\hat{T}x = \{Kx\}$ と類似のものになる．〔方程式 (3.7) の定数のシフトに対応する右辺第2項はあまり影響がない〕．方程式 (2.35) 式は $K \gg 1$ で

$$\rho(\xi) \approx 1.$$

となる．これから

$$\langle 1-2\xi \rangle = \int_0^1 d\xi (1-2\xi) = 0,$$

$$\langle(1-2\xi)^2\rangle=\int_0^1 d\xi(1-2\xi)^2=\frac{1}{3}. \tag{3.19}$$

が得られる．A と D を計算するためには，$\sim(V_0/v)^2$ のオーダーの項まで残さなければならない．写像（3.5）から，方程式（3.12）より正確（$\varDelta v/v\sim V_0/v$ で）な τ_s の表式は，

$$\tau_s=\frac{2l}{v+{}^1/_2\varDelta v}. \tag{3.20}$$

で与えられる．（3.20）式は以下のようにして導びかれる．粒子と上の壁が衝突する時間間隔を考える．上の壁から下の壁に衝突するまでの飛行時間は l/v，下の壁から上の壁までの飛行時間は，粒子の速度が $v+\varDelta v$ に変化するため $l/(v+\varDelta v)$ となる．この2つを加え合わせると方程式（3.20）になる．方程式（3.14）と（3.20）を（3.16）式に代入し，方程式（3.19）を考慮することにより，$\sim(V_0/v)^2$ のオーダーの項まで残すと

$$A=\frac{1}{3}\frac{V_0^2}{l},\quad D=\frac{2}{3}\frac{V_0^2v}{l}. \tag{3.21}$$

が得られる．これから方程式(3.18)が成立していることは直ちに確かめられる．そこで，拡散方程式は（3.17）の形になり，（3.21）式から

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{V_0^2}{3l}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial f}{\partial v}\right), \tag{3.22}$$

が得られる．また，境界条件（3.11）は

$$v\frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_{v=v_0}\approx 0. \tag{3.23}$$

で与えられる．定常分布 f_0 は方程式（3.22）から $\partial f/\partial t=0$ として求められる．方程式（3.23）を考慮して，（3.10）の規格化条件より

$$f_0=\mathrm{const}=1/v_0. \tag{3.24}$$

が与えられる．方程式（3.22）の解は文献［60］に与えられている．ところで，任意の分布から f_0 へ緩和する時間は，方程式（3.22）から直接的に次元解析を用いて決定することもできる．すなわち，

$$\frac{1}{\tau_d}\sim\frac{V_0^2}{lv_0},$$

となる．

上の式の v_0 に方程式（3.9）の v_0 を代入すると，τ_d の表式，

$$\tau_d\sim\frac{l}{V_0}\left(\frac{l}{a}\right)^{1/2}. \tag{3.25}$$

が得られる．方程式（3.25）と（3.12）を比較すると

$$\frac{\tau_d}{\tau_s}=\frac{v}{V_0}\left(\frac{l}{a}\right)^{1/2}\gg 1.$$

となる．したがって，この問題の特性時間の大小関係も，方程式（2.29）と同じになる．

この問題にたいする上記の近似解は，条件（3.8）のもとでフェルミ加速は v_0 までに達するというものである．しかし，上述したように，遷移領域を通る粒子の確率も少ないながら（$\delta f \ll f_0$）存在するので，粒子はより高速にまで加速される可能性がある．[60, 68, 71].

3. 2　重力エンジン

重力場による物体の無制限加速

研究目的のごく一部が，考えている課題やアイデアの規模に影響を及ぼすことがある．宇宙物理学によって重力エンジンのアイデアが創り出されたのもそれである．重力エンジンとは振動重力場，例えば，2連星の場，が宇宙船もしくは単純な物体を加速するために使われるというものである．もし，そのような加速に要する時間などの詳細なことを無視すれば，このアイデアによってウラムモデルと同じ型の興味ある問題が創り出せる．ここでの重力エンジンのモデルの概略は以下のようなものである [13]．質量 m の1つの粒子（ボール）が振動板を垂直に飛び上がり（図3.2参照），それは重力のために板に落ちてくる．問題は多くの回数のジャンプ（板との衝突）に関して平均し，粒子が十分なエネルギーを持ち，高度が大きくなるまで加速され得るか，ということである．この問題は明らかにウラムモデルに類似しているが，粒子が振動板に戻る方法が異なっている．

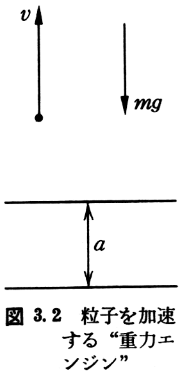


図 3.2　粒子を加速する“重力エンジン”

板の振動が前節と同じ方程式に従うと仮定しよう．方程式（3.5）との類推から

$$v_{n+1}=v_n+2V_0(1-2\xi_n),$$
$$\xi_{n+1}=\{\xi_n+t_{n+1}/T\}, \tag{3.26}$$

という写像の方程式を書くことができる．ここで v_n，ξ_n，T は方程式（3.5）と同じ意味を表わし，t_{n+1} は粒子が n 回の衝突の後に板に戻るのに必要な時間であ

る．また，(3.20) 式は方程式 (3.5) と同様に $\sim a/l$ のオーダーの項までしか取り入れられていない．$l=v^2/2g$ は粒子の昇る距離である．重力場中では

$$t_{n+1}=2v_{n+1}/g. \tag{3.27}$$

となる．方程式 (3.3) と (3.27) を方程式 (3.26) に代入し，V_0/v の級数に展開して，

$$v_{n+1}=v_n+2V_0(1-2\xi_n),$$
$$\xi_{n+1}=\left\{\xi_n+\frac{v_{n+1}V_0}{2ga}\right\}\approx\left\{\xi_n+\frac{v_nV_0}{2ga}-\frac{V_0^2}{ga}(1-2\xi_n)\right\}. \tag{3.28}$$

を得る．この (3.28) 式は，再び引き伸ばし変換になっており，そのストカスティシティの基準は

$$K=2V_0^2/ga\gtrsim 1. \tag{3.29}$$

と書くことができる．すなわち，振幅が十分に小さく，板の振動の速度が十分に大きければストカスティック加速の条件は満足される．条件式 (3.29) は粒子の速度に依存しないため，粒子の加速は無制限である．しかしながら，板に戻るまでの時間も方程式 (3.27) に従って大きくなる．

(3.20) 式との類推から，衝突の間の時間を

$$\tau_s=\frac{1}{2}(t_n+t_{n+1})=(v_n+v_{n+1})\frac{1}{g}=\frac{2v_n}{g}\left(1+\frac{1}{2}\varDelta v_n\right),$$

とおく．ここで，$\varDelta v_n=2V_0(1-2\xi_n)$ である．この関係を用いて，(3.21) 式と同様に係数 A, D を評価する．このとき，$\sim(V_0/v)^2$ のオーダーまでの項を残すと係数 A と D は，この関係から

$$A=\left\langle\frac{\varDelta v}{\tau_s}\right\rangle=-\frac{V_0^2g}{3v^2},\quad D=\left\langle\frac{(\varDelta v)^2}{\tau_s}\right\rangle=\frac{2V_0^2g}{3v}.$$

と得られる．方程式 (3.18) がこの A, D についても成立していることは容易に示される．(3.17) 式の型の方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{3}V_0^2g\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right), \tag{3.30}$$

となる．これは任意の初期条件にたいして解くことができるが，以下の定性的な議論を与えておくだけで十分であろう．方程式 (3.30) から

$$\frac{d}{dt}\langle v^3\rangle=3gV_0^2,\quad \langle v^3\rangle=\int_0^\infty v^3f(v,\ t)\,dv.$$

となる．したがって

$$\langle v^3\rangle=v_0^3+3gV_0^2t,$$

が得られる．すなわち，速度はおおまかにいうと $t^{1/3}$ で増大することになる．

3. 3　スキップする電子の混合性

磁場中の表面電子，ストカスティック加速と散乱ビリヤード，表面電子の運動量分布

「スキップする電子」という言葉は，外部磁場の中に置かれた金属の内部の電子の運動の解析に関連して使われる．磁場の方向が金属表面に沿っている場合に，磁場に垂直な面で運動している電子を取りあげよう．表面から遠く離れた電子の運動はラーモア(Larmor)回転である．表面近傍の電子は表面に沿ってドリフト（「スキップ」）する．ドリフトの型はその表面に，すなわち電子－表面衝突の型に依存する．スキップする電子と平滑な表面の相互作用は図 3.3 に示すように完全弾性衝突と同じである．現実には平滑な表面というものは存在せず，理想的にいっても表面の構造は表面の格子の周期性を持っている．その結果，これは波状表面をスキップしながら横切る電子の問題になる（図3.4）[70]．この運動の特徴は何であり，また，その軌道はどう振舞うのであろうか．

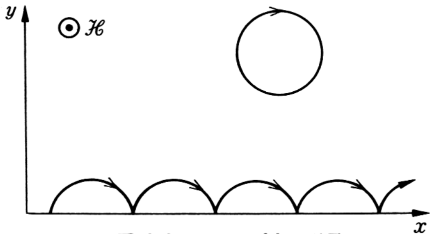


図 3.3　スキップする電子

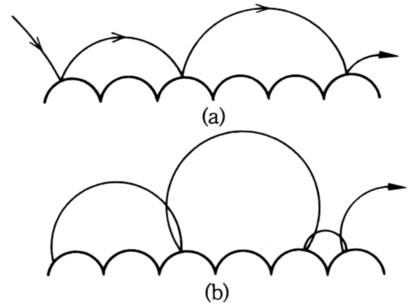


図 3.4　非均一な表面に沿ってドリフトする電子
(a)　“スキップ” する電子
(b)　“自己交差軌道” の電子

この問題は一見したところ非常に特殊な問題のように思われるかもしれないが，実はそうではない．このことを示すために，より特殊な型の表面を考えて論じよう．それは，高さ b，幅 a の弓のような形からなり，その弓の形が密につまっている表面である（図 3.4）．そこでは電子は負の曲率の表面に沿ってのスキップを行なう．ここで磁場によって不均一表面に戻る粒子と「キャタピラー」型のビリヤードと，の類似性がはっきりしてくる（図 2.7 参照）．そこで，電子の運動はある条件のもとで混合性になることが予想される．他の例を考えるのも有意義であろう．電子のドリフトが x 軸に沿っているとして重力エンジンの問題を

再び考えてみよう．もし，y 軸を粒子の垂直方向とするなら，明らかに（y, t）平面での粒子の軌道はスキップしている電子の軌道に類似してくる．違いは，ここでも，軌道の戻り方だけである（重力エンジンは放物型，スキップする電子は円弧型）．

ここで，フェルミ加速の問題とスキップする電子の問題を関係ずけたが，これはまた，これらの全ての問題が負の曲率空間での運動に帰着されることを示している．このことから，系の位相空間を規則的運動の領域とストカスティックな運動の領域とに分割できることがわかる．スキップする電子について，この境界を見出してみよう．

n 回目の衝突の瞬間における電子の座標を x_n，電子の軌道と x 軸のなす角度を φ_n としよう（図 3.5）．簡単のために，

$$\varepsilon=b/a\ll 1.$$

と仮定する．この ε が小さいという近似から

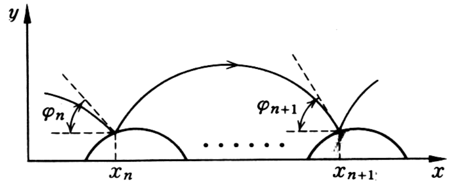


図 3.5 "スキップする" 電子の変数の選びかた

$$x_{n+1}=x_n+2R\sin\varphi_{n+1},$$
$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\varepsilon\chi(\{x_n/a\}), \qquad (3.31)$$

と書くことができる．ここで R は電子のサイクロトロン半径

$$R=\left(\frac{2E}{m\Omega^2}\right)^{1/2}, \quad \Omega=\frac{e\mathscr{H}}{mc}, \qquad (3.32)$$

E は電子のエネルギー，Ω はサイクロトロン振動数である．関数 $\chi\left(\left\{\frac{x_n}{a}\right\}\right)$ は境界の形状で決められる．また $\max(\chi)=1$ とする．ここで

$$\xi=\{x/a\},$$

として，方程式（3.31）を

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\varepsilon\chi(\xi_n),$$
$$\xi_{n+1}=\left\{\xi_n+\frac{2R}{a}\sin\varphi_{n+1}\right\}. \qquad (3.33)$$

の形に書き直す．変換（3.33）式の構造が，方程式（3.5）や（3.27）と同じであることは容易に気づくであろう．そこで，それらの系にたいする解析との類推で，引き伸ばしパラメータは

$$\frac{\delta\xi_{n+1}}{\delta\xi_n}\sim 1+\frac{2R}{a}\cos\varphi_{n+1}\frac{\delta\varphi_{n+1}}{\delta\xi_n}=1+\frac{2R}{a}\varepsilon\chi'(\xi_n)\cos\varphi_{n+1}, \qquad (3.34)$$

と書ける．ここで記号（′）は変数に関する微分を意味する．これから，運動のストカスティシティの基準は

$$K=\frac{2R}{a}\varepsilon|\chi'|\gg 1, \tag{3.35}$$

と与えられる．したがって，$K\sim 1$ がストカスティシティのしきい値（threshold）である．（3.32）式の記法を用いると，方程式（3.35）を電子のエネルギーにたいする不等式として

$$E\gg\frac{m\Omega^2a^2}{8(\varepsilon\chi')^2}\equiv E_0, \tag{3.36}$$

と書き直すことができる．ここでエネルギーのしきい値 E_0 が導入された．

実際には，問題は上で述べたように単純ではない．方程式（3.34）から（3.35）に移する際に困難が生じる．方程式（3.34）の $\cos\varphi$ という因子のために，軌道の引き伸ばしがないような，小さい角度領域が存在する．いま，

$$\Delta\varphi\sim 1/K, \tag{3.37}$$

とおくと，この領域は（$\pi/2-\Delta\varphi$，$\pi/2+\Delta\varphi$）となる．K が十分に大きいと仮定しているので，（3.7）の領域は無視する（注釈2参照）．また，ここでは自己交差（"rolling"）軌道（図 3.4）を考慮しなかったが，これは $\varphi\rangle\pi/2$ の角度で出現する．ウラムモデルと同様に，角度領域の境界（0，$\pi/2-\Delta\varphi$）が反射壁として作用する角度であると仮定すると電子の拡散と平衡分布への到達過程を記述することが可能となる．

ここで，運動量変数

$$p=m\,\Omega R\cos\varphi,$$

を導入しよう．これは座標 x（すなわち，ξ）に正準共役である．変数 ξ の迅速な混合性の結果，分布関数は ξ に関してはほぼ一様分布になる．そこで

$$\langle\chi(\xi)\rangle=0,\ \langle\chi^2(\xi)\rangle\equiv\chi_0^2,$$

と書くことができる．ここで $\chi_0\sim 1$ である．$f(p,x)$ を，x が変数 t の役割をはたす運動量の分布関数とする．規格化条件は

$$\int_{p_{\min}}^{p_{\max}} f(p,\ x)\,dp=1,$$

である．ここで，$p_{\max}=p(\varphi=0)$，$p_{\min}=p(\varphi=\pi/2-\Delta\varphi)$ である．f に関するフォッカープランク方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}D\frac{\partial f}{\partial p}, \tag{3.38}$$

と書ける．ここでDは

$$D=\left\langle\frac{(\Delta p)^2}{\Delta x}\right\rangle, \tag{3.39}$$

である．方程式（3.39）で2つの衝突の間の距離Δxは

$$\Delta x=2R\sin\varphi=2R\left[1-\left(\frac{p}{m\Omega R}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{3.40}$$

である．また，運動量変化は以下のようになる．pの定義と方程式（3.33）から

$$p_{n+1}=m\,\Omega R\cos\varphi_{n+1}=m\,\Omega R\cos\left[\varphi_n+\varepsilon\chi(\xi_n)\right].$$

となる．これを $\sim\varepsilon^2$ の項までの級数に展開すると，

$$\Delta p=p_{n+1}-p_n\approx-\varepsilon\chi(\xi)m\Omega R\left[1-\left(\frac{p}{m\Omega R}\right)^2\right]^{1/2}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\chi^2(\xi)p, \tag{3.41}$$

となる．ここで，右辺の添字nは省略した．方程式（3.40）と（3.41）を方程式（3.39）に代入し，$\sim\varepsilon^2$ のオーダーの項まで残ると，

$$D=\frac{1}{2}\varepsilon^2\chi_0^2m^2\Omega^2R\left[1-\left(\frac{p}{m\Omega R}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{3.42}$$

を得る．前の例と同様に，方程式（3.18）の型の関係が成立していることは容易に見出され，（3.38）式の型の拡散方程式が成立していることが示される．定常解 $f_0(\partial f_0/\partial x=0)$ は，p の境界

$$p_{\min}=m\Omega R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\varphi\right)\approx m\Omega R\Delta\varphi,$$

を越えた所の流量が0となる条件と，規格化条件とから

$$f_0(p)=\mathrm{const}=\frac{1}{m\Omega R}(1+\Delta\varphi). \tag{3.43}$$

の形になる．これは角度φの分布，

$$f_0(\varphi)=f_0(p)\left|\frac{dp}{d\varphi}\right|=(1+\Delta\varphi)\sin\varphi.$$

に相当する．方程式（3.38）と（3.40）から，平衡分布（3.43）に到達するまでの特性的な長さは

$$l_d\sim\frac{R}{\varepsilon^2\chi_0^2}\sim\frac{R}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{2E}{m\Omega^2}\right)^{1/2}. \tag{3.44}$$

で与えられる．誤解を避けるために以下の注意を述べておこう．ここでの問題の物理的内容は，ストカスティックなフェルミ加速を含むものではない．この節の問題が前節の問題と形式的に同一であるため，この章に含めたのである．後に，量子系を解析するときに，再びスキップする電子の問題に戻るであろう。

第3章に関する注釈

1.　文献［60］が出版された後に，ウラムモデルは多くの問題の応用に関連して研究者の注意を引いた．ブラヒック（Brahic）［71］はいろいろな型の振動壁の運動と，遷移領域の粒子の運動を分析した．文献［71］の主要な点は，遷移領域での不変曲線（invariant curve）の解析であった．遷移領域の運動のストカスティックな部分は文献［68］に詳細に解析されている．フェルミ加速の機構の応用は非常に幅広いことがわかってきた．この章と次の章の議論に加え，プラズマ中のサイクロトロン加熱［68, 72, 73］と，ステラレータ中での実際のプラズマの予備加熱においてもストカスティックな機構が存在するということを注意しておこう．

2.　前章と同様に，遷移領域と（3.37）の領域に関する議論は第4章で詳細におこなう．

4章　振動のストカスティックな不安定性

これまでいくつかのタイプの比較的単純な力学系の運動からストカステッィク な運動への遷移がみられるような物理的モデルを考察してきた．これらのモデルから，非常に荒い近似ではあるが，局所不安定性を導く要因を見出すことができた．軌道の混合性の過程で，振動の位相が急激に変化することが非常に重要であることが確かめられた．

本章と次章で，これまでと違った議論をする．ハミルトニアン系で発生するストカスティシティの一般的描像を得るための知識をまとめておこう．まず，非線型振子の局所不安定性を解析することから始めるが．このような方法はハミルトニアン系の有限運動を取り扱うときの一般的な方法である．

4.1　非線型振子のユニバーサル変換（写像）

ユニバーサル変換の導出，ユニバーサル変換は何故“universal”か？，混合性の基準，安定性の島（stability island），厳密な理論は何故構成できないか？，相関消滅時間

第3章で考察したストカスティック加速のモデルは離散モデルと呼ばれている．これは変数（I, θ）という正準共役な変数にたいする運動方程式が，適当な離散時間，t_1, t_2, … を用いての変換の式として

$$I_{n+1}=I_{n+1}(I_n,\ \theta_n),$$
$$\theta_{n+1}=\theta_{n+1}(I_n,\ \theta_n).$$

のように表わすことが可能であることを意味する．これ以後，添字nを使わずに，上述の2つの方程式を

$$\bar{I}=I+g_1(I,\ \theta),$$
$$\bar{\theta}=\theta+g_2(I,\ \theta), \tag{4.1}$$

と表わすことにする．ここで，バーは添字 $n+1$ の代わりに使い，g_1, g_2 は摂動で決定される関数である．g_1 と g_2 の間に

$$\frac{\partial(\bar{I},\bar{\theta})}{\partial(I,\theta)}=1 \tag{4.2}$$

の条件で課せられる関係があるとする．これはハミルトニアン系を考え，変数 (I,θ) が正準共役のためである（リュービルの定理）．また，位相 θ は mod 2π で定義されているとする．

方程式 (4.1) は外力の下に置かれている1自由度系（このような系は通常 3/2 の自由度を持つといわれる）に対応している．一般の場合には，方程式 (4.1) より高次の写像の方程式を書くこともできる．

運動方程式が (4.1) の形に書けるのは，特別のモデルが選ばれた場合だけである．普通，運動方程式は微分方程式である．そこで，微分の形を写像の形に変換することが可能かどうかという疑問が当然わいてくる．この変換は，いつも具体的な形が導けるというわけではないが，原理的には可能であり，また以後の議論で必要なことでもある．それが何故であるかを説明しよう．まず，変数の選択がこの説明の中心をなす．g_1 を小さな摂動としよう． 1自由度の場合には円柱の表面となる不変トーラス上で作用は定数である；すなわち，$I=\text{const}$ となる．したがって，作用の増分，$\Delta I=\bar{I}-I$ は運動の断熱性の程度に関連してくる．いわゆる断熱的な場合には ΔI は指数関数的に小さくなるので，その増分は非常に短い時間間隔の変化が徐々に蓄積したものになる．非断熱性の場合には作用の増分は断熱性が破られるような，特徴的な時間間隔 Δt の間に主に蓄積する．ここで重要な点は Δt が有限ということである．これは変換のステップの間隔を T として，それを作用が顕著に変化する領域の間隔を Δt より大きくとれること，すなわち$T>\Delta t$とれることを意味している．変換の方程式は， 2つの隣接する領域の (I,θ) を関係づけることから得られる．もし興味を安定性の損失に向けるなら，不安定性の場合には必らず本質的な非断熱性の領域が存在するといってよい．もし，系がこのような領域を通過するとその間の作用の増分，ΔI は変換の時間間隔 T にわたる作用の変化の大部分を占める．

断熱性の破れは式 (4.1) の型の系で記述される．一方，関数 g_1, g_2 の形によって多種多様な物理的状況が現われる．しかしながら，その選択は運動の一般的な構造から決定されるべきもので，全く任意というわけではない．こうした議論から，変数 $(I,\ \theta)$ のユニバーサル変換が存在することを主張できるだけでなく，任意のタイプの断熱的な摂動を考慮することもできる．したがって，最も簡単な場合（関数 g_1, g_2 の構造の一般性を失なわない）は，変換 $\hat{T}$ が一定の間隔で作

用し，かつ，断熱的な時間領域が無限小（$\Delta t \to 0$）のときである．このような系のハミルトニアンは

$$H=H_0(p,\ x)+\varepsilon V(x)T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT), \tag{4.3}$$

と書くことができる．ここで $\varepsilon \ll 1$ は摂動を特徴づけている無次元のパラメータである．因子 T は便宜上導入されたものであり，非摂動ハミルトニアン H_0 は非線型振子を記述するものとする．表式（4.3）はこの振子にキック（δ 関数形の衝撃）が周期的に作用することを表わしている．キックとキックの間では振子の運動は自由運動である．キック前後の運動を正確に関係づけることによって，式（4.1）の型の変換方程式が導かれることを以下で示そう．

方程式（4.3）の変数を，作用変数と角変数に変換すると，H は

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\ \theta)\,T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\,(t-kT) \tag{4.4}$$

となり，運動方程式は

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\theta}\,T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\,(t-kT),$$

$$\dot{\theta}=\omega(I)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial I}\,T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\,(t-kT). \tag{4.5}$$

と書くことができる．ある時刻 $t=t_0$ でキックが起きるとしよう．写像 $\hat{T}$ を以下のように定義する

$$\begin{aligned}
&(\bar{I},\ \bar{\theta})=\hat{T}\,(I,\ \theta),\\
&\bar{I}\equiv I\,(t_0+T-0),\quad \bar{\theta}\equiv\theta(t_0+T-0),\\
&I\equiv I\,(t_0-0),\qquad\quad \theta=\theta(t_0-0).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

写像 $\hat{T}$ はトーラス上での作用にたいするキックと自由回転にたいするキックの積である．方程式（4.5）をキック時刻 t_0 近傍の小さな区間で積分すると，

$$I(t_0+0)-I(t_0-0)=\int_{t_0-0}^{t_0+0}\dot{I}\,dt=-\varepsilon T\frac{\partial V(I,\ \theta)}{\partial\theta},$$

$$\theta(t_0+0)-\theta(t_0-0)=\int_{t_0-0}^{t_0+0}\dot{\theta}\,dt=\varepsilon T\frac{\partial V(I,\ \theta)}{\partial I}$$

を得る．ここでポテンシャル V は座標 x のみの関数であることを考慮に入れよう．x はキックの瞬間も連続である（不連続性は運動量 p にだけ現われる）．そこで，$V(x)=V(\bar{x})$ もしくは $V(I,\ \theta)=V(\bar{I},\ \bar{\theta})$ が成立する．作用はその後の自由回転の間は保存し，位相は振動数に比例して増える．

$$I(t_0+0)=I(t_0+T-0)=\bar{I},$$
$$\theta(t_0+T-0)=\theta(t_0+0)+\omega(\bar{I})T.$$

そこで，方程式（4.6）と，上記の積分した関係式とから，最終的に

$$\bar{I}=I-\varepsilon T\frac{\partial V(I,\ \theta)}{\partial\theta},$$
$$\bar{\theta}=\theta+\omega(\bar{I})T+\varepsilon T\frac{\partial V(I,\ \theta)}{\partial I}. \tag{4.7}$$

が得られる．ここで方程式（4.7）が厳密に導かれたものあることを特に注意しておく（注釈1参照）．フェルミ加速を含むいくつかの問題における変換は方程式（4.7）の特殊な場合であることは容易に証明できる．

$V=V(\theta)$ を仮定して，(4.7) 式の簡略をはかろう．以下で明らかになるように，このようにしても問題の一般性は失なわれない．いまの仮定のもとで，(4.7) 式は

$$\bar{I}=I-\varepsilon I_0 g(\theta),\quad \bar{\theta}=\theta+\omega(\bar{I})T, \tag{4.8}$$

と書ける．ここで

$$T\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}=I_0 g(\theta)$$

であり，I_0 は I と同じ次元を持つ．パラメータ ε は $\max g(\theta)\sim 1$ であるように選ぶ．また，g は θ の周期的な関数であるとしよう．例えば，摂動が θ の1つの調和関数で表わされるとしよう．そのときには $g(\theta)=\sin\theta$ で，方程式（4.8）は

$$\bar{I}=I-\varepsilon I_0\sin\theta,$$
$$\bar{\theta}=\theta+\omega(\bar{I})T\approx\theta+\omega(I)T-K\sin\theta, \tag{4.9}$$

になる．ここで，第2式は ε で展開し，

$$\alpha=\frac{I_0}{\omega}\left|\frac{d\omega(I)}{dI}\right|, \tag{4.10}$$

$$K=\varepsilon\alpha\omega T. \tag{4.11}$$

と置いたものである．

さて，変換式（4.9）を考えてみよう．作用はわずかにしか変化しない（$\Delta I/I\sim\varepsilon$）．以前と同じように，主要な情報は θ に関する方程式に含まれている．位相の広がりを特徴づけている

$$\left|\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta\theta}-1\right|=K|\cos\theta|, \tag{4.12}$$

という量を考えよう．これは $K\ll 1$ のとき小さな量であり，それゆえKAM定理によって運動は安定であるということができる．もし，$K\gg 1$ ならば局所不安定性が成長して，その結果，位相空間での軌道が混合性を持つことになる．しか

し，K が大きい場合でも，$K|\cos\theta|<1$ となるような小さな角度領域

$$\Delta\theta \lesssim 1/K, \tag{4.13}$$

が存在する．そこでは引き伸ばしは起きない．この領域は $\theta=\pi/2$ の近傍にあり，それに相当する安定軌道も存在する．この定性的な解析から，図 4.1 のようなストカスティシティを示す概念図が考えられる．そこでは，位相空間はトーラスが破壊された「ストカスティシティの海」と，その中に入っている不変トーラスの「安定性の島」がみられる．

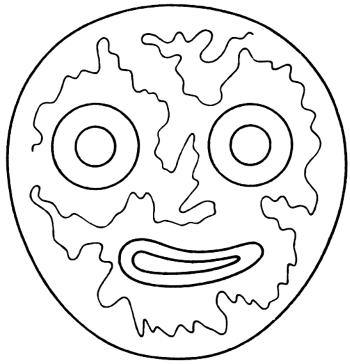


図 4.1 “ストカスティシティの海”のなかの“安定性の島”

「安定性の島」も，ある特定な K の値にたいして，いくつかの不安定解を持ち得る．例えば，写像 (4.8) で

$$\varepsilon I_0=K,\ g(\theta)=-\sin\theta,\ \omega(I)=I,\ T=1,$$
$$I(0)=0,\ \theta(0)=\theta_0,$$

を仮定しよう．ここで $I(0)$ と $\theta(0)$ とは初期の作用と角度である．そこで，もし

$$K\sin\theta_0=2\pi m,$$

(m は整数)，ならば

$$I_n=2\pi mn.$$

となる．すなわち，作用は線型で規則的な時間の増大関数である．実際，$K\sin\theta_0=2\pi m$ という値の近くに有限測度の，加速の機構が存在する領域がある．

不安定性の海と安定性の島の間に，何等かの境界が存在するかどうかという疑問が当然生じてくる．この疑問は，以下のようにも述べることもできる．すなわち，小さな安定性の島が全位相空間での運動の一般的なパターンに大きな影響を与え，ストカスティシティを消滅させることがあり得るだろうか？　このことに関して，変換 (4.9) 式の厳密な理論は存在しない．このような理論を構築する際の困難は，安定性の島が有限な測度 (4.13) 式を持つことから生じる．これが，いまだに実用上の現実的な物理学と厳密な解析とが融和しない理由である．これらの問題点はチリコフとイズライレフ (Chirikov and Izrailev) [76, 77] によって，非常に多くの数値解を通して論じられた〔参考文献 [15]，[14]，[18] も参照〕．その結果は，図 4.1 のストカスティシティの概念図で表わされる定性的な議論を支持している．言い換えると，引き伸ばしに関する簡単な解析からスト

カスティシティの基準

$$K=\varepsilon\alpha\omega T\gtrsim 1, \tag{4.14}$$

が導かれ，$K\sim 1$ がストカスティシティの境界であることがわかった．概略的に述べると，安定性の島の測度が小さい時にストカスティシティが出現する．この結論は次章で，より一般的な立場から議論することにして，ここでは方程式（4.7）のストカスティシティのユニバーサルモデルとしての性質をより詳細に解析しよう．

まず，変換式（4.7）から変換式（4.8）への移行過程での簡略化はストカスティシティの領域，すなわち $K\gg 1$，では重要なことではないことを注意しておく．実際，$\varepsilon T\partial V/\partial I$ という項は $\varepsilon g\sim\varepsilon$ と同程度の量であり，(4.14) の条件式に影響を与えない．これは，中間領域と安定性の島の数やその構造を変えるにすぎない．したがって，方程式(4.8)から比較的大きい α のときに導かれる変換式(4.9)を調べることにより，一般的なパターンを得ることができる．更に，$\alpha\ll 1$ を仮定する．そうするとストカスティシティの基準(4.14)は小さいパラメータ ε, α と，大きなパラメータ ωT との積である．このことから次の重要な結論が導かれる．すなわち，ストカスティシティは摂動（ε）と非線型性（α）がある臨界値より大きくなるときに成長する．以下で，位相 θ の相関関数を評価し，$K\gg 1$での相関消滅時間を計算しよう．そのために，近似的な1次元写像の漸化方程式

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\omega T-K\sin\theta_n. \tag{4.15}$$

を用いる．また，相関関数として

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(r,\ \theta_n|s,\ 0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_0\exp\{i(r\theta_n-s\theta_0)\}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_0\exp\{i(r\theta_{n-1}+r\omega T-rK\sin\theta_{n-1}-s\theta_0)\},\end{aligned} \tag{4.16}$$

という表式を考える．ここで，$t_n=nT$，また，r, s は正整数である．これと類似した展開式

$$\exp(iz\sin\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)\exp(im\theta),$$

を用いよう．ここで J_m はベッセル関数である．これを方程式（4.16）に代入し，反復操作を繰り返すと，

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(r,\ t_n|s,\ 0)&=\exp(ir\omega T)\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^mJ_m(rK)\,\mathscr{R}(r-m,\ t_{n-1}|s,\ 0)\\&=\exp(irn\omega T)\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\infty_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2+\cdots m_n}\times\end{aligned}$$

$$\times\exp[-i\omega T(m_1+m_2+\cdots+m_n)]\cdot J_{m_1}[rK]\cdot J_{m_2}[(r-m_1)K]\cdots$$
$$\cdots J_{m_n}[(r-m_1-m_2-\cdots-m_n)K]\cdot \mathscr{R}(r-m_1-m_2-\cdots-m_n,\ 0|s,\ 0).$$

を得る．そこで，自明な等式，

$$\mathscr{R}(m,\ 0|n,\ 0)=\delta_{mn}$$

および，$K\gg 1$ でのベッセル関数の漸化式，

$$J_m(pK)\backsim(pK)^{-1/2}.$$

を使って，

$$\mathscr{R}(r,\ t_n|s,\ 0)\backsim K^{-n/2}\exp(inr\omega T)$$
$$=\exp(-t_n/\tau_c)\exp(inr\omega T),\quad \tau_c=2T/\ln K. \tag{4.17}$$

が得られる．公式（4.17）は引き伸ばしの変換（2.1節）の相関関数に類似しているが，位相の相関消滅時間 τ_c は 2 倍だけ異なる．

より一般的な変換式（4.7）の場合には，どの様に書き換えたらよいであろうか？　この場合方程式（4.15）は明らかに，

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\omega T+Kg(\theta). \tag{4.18}$$

の型の方程式で置き換えられる．$g(\theta)\sim 1$ であるため，3 角関数による級数展開で，

$$\tau_c=\mathrm{const}\cdot T/\ln K, \tag{4.19}$$

が見出される．ここで，定数は 1 のオーダーであり，$g(\theta)$ の形から決められる．もちろん，これまでの評価は安定性の島が無視できるような，$K\gg 1$ で成立する．

4. 2　共鳴の重なりの基準（チリコフの重なりの基準）

共鳴の相互作用，共鳴の重なり，局所不安定性との関係，共鳴の数の重要性

ユニバーサルなモデルの方程式（4.5）を，もう一つの立場から考えてみよう．ここでも

$$V=V(\theta)=-(I_0/T)\cos\theta.$$

を仮定する．フーリエ級数展開

$$T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(im\nu t),\quad \nu\equiv 2\pi/T, \tag{4.20}$$

を用いて，方程式（4.5）を

$$\dot{I}=i\varepsilon I_0\nu\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\exp[i(m\nu t+\theta)]-\exp[i(m\nu t-\theta)]\},$$

$$\dot{\theta}=\omega(I). \tag{4.21}$$

の形に書く．この系は既に 1.3 節で論じており，そこではこれの特殊な場合，すなわち弧立非線型共鳴の場合を解析した．

第一近似では方程式（4.21）における可能な全ての共鳴は

$$\dot{\theta}-m\nu=0 \ (m>0),$$

もしくは

$$\omega(I_m)=m\nu \ (m>0), \tag{4.22}$$

の方程式で決められる．ただし，I_m は方程式（4.22）の根である．ここで，

$$\psi_m=\theta-m\nu t$$

として，各共鳴値 I_m の近傍で，他の全ての共鳴を無視して，系の軌道を考える．個々の I_m の近傍には図 1.8 で示した位相パターンが現われる．当面，全ての I_m は十分に離れていて，分離していると仮定しよう．系（4.21）式の位相軌道は図 4.2 に示すような（I, θ）面で表現される．

$$\delta I_m=I_{m+1}-I_m \tag{4.23}$$

という量は共鳴の間の作用間隔と呼ばれている．この量は，共鳴の間の振動数間隔

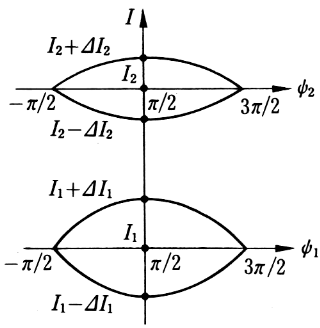


図 4.2　共鳴が分離している

$$\delta\omega_m=\omega(I_{m+1})-\omega(I_m). \tag{4.24}$$

と対応させることができる．共鳴の間隔が十分に大きいという条件は

$$\delta I_m \gg \Delta I_m, \tag{4.25}$$

を意味する．ここで ΔI_m は（1.33）式において，非線型共鳴で生成されるセパラトリックスの幅を表わす量として定義されたものである．そうすると，条件式（4.25）は図 4.2 のセパラトリックスが重ならないことを意味する．このようなときは，系は初期条件に応じて 1 つの共鳴領域に属するか，または共鳴と共鳴の中間領域に属することになる．前者の場合，主共鳴だけの効果を考えれば，第一近似としては，十分であり，後者の場合には非共鳴近似の枠内で扱かうことができる．この結果を導くための議論は，クリロフ－ボゴリューボフ－ミトロポルスキー（Krylov-Bogolynlov-Mitropol'sky）[80, 81] の理論の中にある．（4.25）の条件式もしくはそれと同等の条件

$$\delta\omega_m \gg \Delta\omega_m, \tag{4.26}$$

は共鳴の結合が弱い条件という．ここで $\Delta\omega$ は（1.34）式で与えられている．

上記の定義は，共鳴が接近し，それに対応するセパラトリックスが重なったとき（図 4.2），系に何が起きるかという問題を提起している．このようなときは，共鳴の結合は強い（強結合共鳴）ということができる．

パラメータ，

$$\bar{K}=\frac{\Delta\omega}{\delta\omega}\sim\frac{\Delta I}{\delta I}, \tag{4.27}$$

を，重なりの度合い(あるいは結合の度合い)を表わす量として導入しよう．もし

$$\bar{K}\ll 1 \tag{4.28}$$

なら方程式（4.25），（4.26）に従って結合は弱く，もし，

$$\bar{K}\gtrsim 1 \tag{4.29}$$

なら共鳴は強く結合している．

共鳴の重なりのパラメータ，$\bar{K}$ はチリコフ［82］によって 1959 年に導入された．チリコフは方程式（4.29）の場合に系の運動は共鳴のあいだで複雑にまざりあい，その挙動はストカスティィクな運動に類似してくるという仮説を立てた．言い換えると，$\bar{K}\ll 1$ では KAM 理論により運動は安定で，$\bar{K}\gtrsim 1$ で局所不安定性が成長する．後になって，共鳴の重なりの基準がストカスティシティの基準となることが，多くの数値実験や直接の実験から確証された（注釈 2 参照）．

ここでの当面の目的は共鳴の重なりの基準（4.29）式と引き伸ばしの基準（4.14）式の関係を見出すことにある．この目的のために，方程式（4.27）の $\bar{K}$ の表示をより具体的な形に書き直す．

方程式（1.32）式と，（1.34）式によると，単一共鳴の幅は位相振動の振動数に等しい．すなわち，

$$\Delta\omega\sim(\varepsilon V_0|\omega'|)^{1/2},$$

である．ここで，εV_0 は $\dot{I}$ にたいする方程式の右辺（(1.24)式参照）である．また，方程式（4.21）から $V_0\sim I_0\nu$ である．そこで，

$$\Delta\omega\sim(\varepsilon I_0\nu|\omega'|)^{1/2},$$

であり，I_0 に関しては作用の共鳴値を取る．方程式（4.10）の表記法を用いて，$\Delta\omega$ を

$$\Delta\omega\sim(\varepsilon\alpha\nu\omega)^{1/2}. \tag{4.30}$$

の形に書く．方程式（4.22）と（4.24）から共鳴の間隔は

$$\delta\omega=\nu\sim 1/T. \tag{4.31}$$

となる．方程式（4.30）と（4.31）を方程式（4.27）に代入して，

$$\bar{K}=(\varepsilon\alpha\omega T)^{1/2}. \tag{4.32}$$

が得られる．この方程式（4.32）と（4.11）を比較すると，

$$K=\bar{K}^2, \tag{4.33}$$

という結果を得る．これが共鳴の重なりのパラメータ $\bar{K}$ と，引き伸ばしのパラメータ K との直接的な関係である．K と $\bar{K}$ とのより深い関係の解析は次章で行なう．

最後に，上述の議論を具体的な問題に応用するときの注意を述べておこう．共鳴の重なりの基準（4.29）式は他の共鳴を全く無視して，ただ1つの共鳴の近傍での系の運動を分析することによって求められた．1.3節で見たように，このことにより結果は技術的には容易に得られ，すぐ後で示されるが，評価式（4.29）は非常に便利で実際的な道具である．一方，ユニバーサルモデル（4.5）式の右辺は等間隔パルスの和を含んでいる．この力を（4.20）式のフーリエ級数に展開すると，ν だけ離れた等間隔の等振幅の調和振動を無限個含む．これを調和振動の数が有限であり，また，振幅や調和振動の間の振動数の間隔がわずかに変化するような問題に修正することもできる．その場合にも基準（4.29）は成立する．問題をこのように修正しても，もちろん，変換式の導出や引き伸ばしパラメータを決定することは可能であるが，そのような場合には共鳴の重なりの条件から直接導く方が近道である．

4.3　正弦関数変換

引き伸ばしパラメータの関数としての位相軌道，正弦関数変換を何故選択するのか？　定常分布関数

引き伸ばし変換が厳密にみつかり，それが単純である場合には運動の型はパラメータ K によって容易に決められる．すなわち，$K<1$ で運動は安定であり，$K>1$ で混合性が出現する．これまでに既に述べてきたように，現実の問題はそんなに単純ではない．このことは安定性の島とパラメータ K の有限な幅の遷移領域とが存在することに帰因する．このため，運動のモードの変化の問題，もしくは専門用語で K の変化による「分岐」の問題は明らかに重要な意義を持っている．

ある近似，すなわち作用の変化が大きくないという近似，のもとでの運動に関

する十分な情報は方程式 (4.18) の位相変換から得られ，またその場合に安定性の島の存在とその構造が関数 $g(\theta)$ の形から決められるということはすでに述べた．次のように単純化された変換，

$$\bar{x}=\hat{T}x\equiv\{K\sin(\pi x)\}, \tag{4.34}$$

を考えてみよう．これは方程式 (4.18) の位相変換の全ての特徴的な情報を含んでいる．方程式 (4.34) からつぎの厳密な結論が得られている [81]．$K=N+\frac{1}{2}$ という半整数値の近傍に有限測度の領域が存在し，その領域の K の値にたいして軌道を引き寄せるような安定点，x_1，x_2，… が存在する．このような領域は無数個あり，そのサイズは K が増大するにつれて小さくなる．以下でこれに関連した定性的な分析を行なおう．

まず，半整数値近傍の K を考えよう．いま

$$K=N+\frac{1}{2}+\delta,\quad \delta\ll1,$$

ととり，また $K\gg1$ とする．初期値 $x=\frac{1}{2}+\varepsilon$ の点の近傍を考えると，方程式(4.34) から

$$\bar{x}=\{(N+\frac{1}{2}+\delta)\cos\varepsilon\pi\}\approx\{\frac{1}{2}+\delta-\frac{1}{2}N(\varepsilon\pi)^2\}. \tag{4.35}$$

を得る．$\delta\ll\varepsilon$，$K\varepsilon^2\ll1$ の場合に安定領域を見つけよう．方程式 (4.35) から

$$\bar{x}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2}N(\varepsilon\pi)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}K(\varepsilon\pi)^2\equiv\frac{1}{2}+\bar{\varepsilon}.$$

ここで $|\bar{\varepsilon}|<\varepsilon$ という条件は安定性を意味する．つまり，上記の操作を操り返すと $x\to\frac{1}{2}$ となる．$|\bar{\varepsilon}|$ を $\frac{1}{2}K(\varepsilon\pi)^2$ に書き直すと，安定性の条件は

$$\varepsilon<\varepsilon_0=2/K\pi^2. \tag{4.36}$$

となる．方程式 (4.36) は $\delta\ll\varepsilon$ で $K\gg1$ であるにもかかもらず，点 $x_0=\frac{1}{2}$ に接近してゆくような x の領域を決定している．

δ が増加すると，いまの変換は 2 つのアトラクター点

$$x_1=\{K\sin\pi x_2\},\quad x_2=\{K\sin\pi x_1\}.$$

をもつようになる．$x=\frac{1}{2}$ 近傍では（すなわち K が半整数値に近いと），アトラクター点は方程式

$$x_1=\{K\},\quad x_2=\{K\sin\pi\{K\}\}$$

から見出され，周期軌道に対応する．そして 1 つのアトラクターの点から 2 つのアトラクター点への分岐のおこる K の値は $K=8.521$ である．この数値解析は文献 [83] に与えられている．図 4.3 はいかに x の細胞（総数 500）が占有されるかを，いろいろな K に関して表わしたものである．例えば $K=8.521$ のときは 2 つのアトラクターが表われる．共鳴軌道の順位の増加（すなわち，アトラク

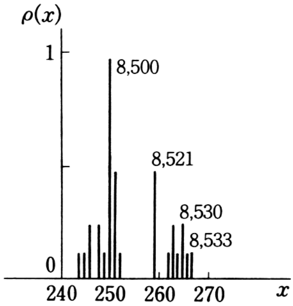


図 4.3　安定性の領域での分布関数．分岐がおこるKの値を数字で示す．

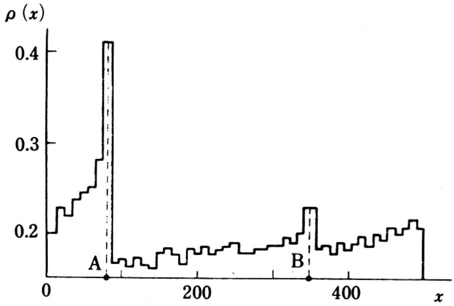


図 4 4　混合性の場合の分布関数

ターの数の増大）に伴ない，細胞の占有度が減少するのは規格化条件からわかる．上記の K と x の領域の外側では運動は混合性になる．その分布関数 $\rho(x)$ を図 4.4 に与える．x_i が共鳴点のとき，特異性が存在し，$\sim(x-x_i)^{-1/2}$ の型となることがブニモビッチ（Bunimovich）［84］により示されている．共鳴点 x_1, x_2 は図 4.4 の鋭い極大点 A, B に厳密に一致している［$\rho(x)$ の計算に 2.1 節で述べた方法を使って分布関数 $\rho(x)$ のルート発散を証明してみよ］．

以下の議論はより具体的な計算のために有益であろう．$\rho(x)$ の特異性は積分可能であり，その幅は十分に狭いので（$\Delta x=0.02$ のサイズの細胞内の粒子の個数は，1つの細胞あたりの平均数の 4 倍になるにすぎない），十分良い精度で

$$\rho(x) \approx \mathrm{const}=1 \tag{4.37}$$

を，平均値の計算の際に仮定することができる．(4.37) の性質は，これ以後しばしば使われることになる．何故なら $K \gg 1$ のとき，多くの問題の変換式がストカスティシティのユニバーサルモデルの変換式 (4.7) に帰着させることができるからである．

第4章に関する注釈

1.　(4.7) 式の型の変換式は，非線型振動のストカスティック不安定性の問題に関するチリコフの論文［82］で初めて定式化されたものである．後に，多くの人がこれに注目し，いろいろな修正とその解析が行なわれた［14, 15, 48, 78, 76］．式 (4.7) をいろいろに簡略化したものはストカスティシティの理論で生ずる多数の問題に対する有力な道具となることが判明してきた．

2.　チリコフの共鳴の重なりの基準，つまり方程式 (4.29) は相当に複雑な系でのストカ

スティシティを調べるための，非常に効果的な方法として，多くの著者により使われた．この基準を導くときの物理学者の直観は，厳密な方法を基礎にしたものでも，エルゴード理論と関係したものでもない．共鳴の重なりの条件の数値解析は参考文献［13，14，15，45］で行なわれた．ウォルカーとフォード（Walker and Ford）［85］は2つだけの共鳴が重なる場合を解析している．

3. ここでつぎのことに注意した方が良いと思われる．他の十分に一般的性質を持つ定性的な条件と同様に，これも保留付きのものであるが，保留条件の定式化は容易でない．この状況は共鳴の重なりの基準の厳密な導出方法が存在せず，正確にその正当性の極限をとることが不可能であるという理由に依っている．たとえば，2つの共鳴がほぼ一致するくらいに（$\delta I_m \to 0$，$\delta\omega_m \to 0$），重なりが強いとしよう．そのときには実質的に共鳴は1つであって，振幅が倍になるだけでストカスティシティは何ら生じないのは明らかである．しかしながら，共鳴の個数Nがより大きく，$N > \bar{K}$，すなわち共鳴の全個数が共鳴の重なりのパラメータより多い時には上に述べたストカスティシティの縮退の効果は表われず，(4.29) 式の基準は成立する．基準（4.29）の多くの特徴やその詳しい取り扱かいについては，チリコフの総合報告［15，48］を参照されたい．

5章 ストカスティックな層：その形成の理論

この章で展開する議論は，ハミルトニアン系のストカスティシティに関する一般論の基礎となるものである．量子論の言葉を借りるならば，量子論の“量子”に対応するものがストカスティシティでは何であるかという問題，言い換えると，ストカスティシティの源となる位相空間の最小の細胞は何であるかという問題を考察する．ハミルトニアン系の有限運動については，この問題に答えることができる．このときは，ストカスティシティの“量子”は，セパラトリックス近傍に任意に小さくはあっても意味のある摂動によって形成されるストカスティックな層（図5.1）であることがわかる（注釈1を参照）．

5.1 セパラトリックスのストカスティックな消滅

セパラトリックス近傍の運動の特色，変換の構成，ストカスティシティの条件，ストカスティックな層の厚さ．

時間的に周期的な摂動をうけている非線型系を考えよう．系のハミルトニアンは，

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\ \theta)\cos\nu t \qquad (5.1)$$

で与えられるとする．(5.1) 式では，時間依存性として最も簡単な形がとられている．無摂動ハミルトニアン H_0 としては，たとえば，振子の場合〔1.2節と (1.13) 式をみよ〕を考えると，

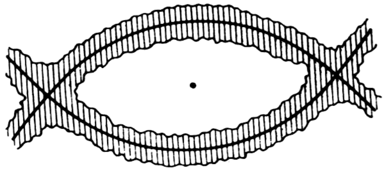


図 5.1 セパラトリックス近傍のストカスティックな層（縦線の領域）

$$H_0=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\omega_0^2\cos x \qquad (5.2)$$

で与えられる．ここで，ω_0 は微小振幅振動の振動数であり，また，振子の質量は1にとってある．(5.2) 式が表わす系の位相空間上の軌道を図 1.2 (b)に図示した．

この例で，系 (5.2) がセパラトリックスをもっているという点は本質的に重要

である．あとの議論で，無摂動系の他の諸々の性質が結論に顕著には影響しないことをみるであろう．(5.1) 式の摂動項 $V(I, \theta)$ はポテンシャル関数 $V(x)$ を，$(x, \dot{x})\to(\theta, I)$ という変数変換で書き換えたものである．

作用変数に対する方程式は，仕事率 $\dot{H}$ が力 $\varepsilon(\partial V/\partial x)\cos\nu t$ と速度 $\dot{x}$ との積であるという事実を用いると，次のように書ける，

$$\dot{I}=\frac{dI}{dH_0}\dot{H}=-\frac{\varepsilon}{\omega(I)}\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\cos\nu t. \tag{5.3}$$

一方，角変数 θ に対する方程式は，

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial I}\cos\nu t, \tag{5.4}$$

となる．振動数 $\omega(I)$ は次の性質をもっている（1.2 節をみよ），

$$\lim_{I\to 0}\omega(I)=\omega_0;\ \lim_{I\to I_c}\omega(I)=0. \tag{5.5}$$

ただし，I_c はセパラトリックス上の作用変数の値である．また，この時，エネルギーは $H_c=\omega_0^2$ になる．

さて，セパラトリックス近傍の軌道，すなわち，不等式

$$\frac{1}{N}=\frac{\omega(I)}{\omega_0}\ll 1 \tag{5.6}$$

をみたす軌道に摂動が作用したときの影響を考察しよう．なお，(5.6) 式の N は以前に (1.17) 式で導入した量である．(5.3) 式と (5.4) 式を差分形式に変形するのであるが，そのためには，1.2 節で述べたセパラトリックス近傍の運動の特性を思い出す必要がある．粒子がポテンシャルの井戸を通過するのに必要な時間は $1/\omega_0$ の程度である．したがって，1 周期 $1/\omega$ のうちの大部分の時間は転移点の近傍で費やされる（$1/\omega\gg 1/\omega_0$ であることに注意する）．図 1.3 は，セパラトリックス近傍の速度 $\dot{x}$ を時間の関数として図示したものである．パルスと隣のパルスとの間隔に対する 1 個のパルスの幅の比が N であり，いまの場合，$N\gg 1$ である．(5.3) 式には $\dot{x}$ が乗数として現われているので，4.1節の (4.5) 式に対して行ったのと同じ手続で，1 つのパルスから隣のパルスへの変換を構成することができる．パルスとパルスとの間では，指数関数的な精度で，$\dot{x}=0$ と置けることに注意して，(5.3) 式を積分すれば，

$$\bar{I}=I-\frac{\varepsilon}{\omega(I)}\int_{\Delta t}dt\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\cos\nu t, \tag{5.7}$$

を得る．ただし，右辺の積分は，1 つのパルスの幅を含む時間 Δt にわたって行うものとする．実際には，Δt を $\dot{x}\neq 0$ であるような時間間隔に限定してよい．そ

こで，あらたに，外力（摂動）の位相に対応する変数φを次式によって導入すると便利である，

$$\dot{\varphi}=\nu. \tag{5.8}$$

ここでφを導入したのは，ウラムのモデルを考察した時（3.1節），振動する壁に対して，粒子との衝突の瞬間を表わす位相を導入したのと同じ考え方にもとづいている．（5.8）式を，あるパルスから次のパルスまでの時間（$\pi/\omega(I)$）にわたって積分すると，変換，

$$\bar{\varphi}=\varphi+\frac{\pi\nu}{\omega(\bar{I})} \tag{5.9}$$

が得られる．（5.7）式と（5.9）式が求めるべき変換である．これらは，ユニバーサルモデルの変換をわずかに複雑にした形になっている．

εは小さいので，（5.9）式を次のように展開することが許される，

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}&=\varphi+\frac{\pi\nu}{\omega(I)}-\frac{\pi\nu}{\omega^2(I)}\omega'(\bar{I}-I)\\&=\varphi+\frac{\pi\nu}{\omega(I)}+\frac{\varepsilon\pi\nu\omega'}{\omega^3(I)}\int_{\Delta t}dt\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\cos\varphi.\end{aligned}$$

ただし，ω'は$d\omega(I)/dI$である〔（1.29）式を参照〕．上記の関係式は，引き伸しパラメーターKが，

$$K=\left|\frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi}-1\right|=\frac{\pi\nu\varepsilon|\omega'|}{\omega^3}C, \tag{5.10}$$

で与えられることを意味する，ただし，Cは

$$C\equiv\left|\int_{\Delta t}dt\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\sin\nu t\right|. \tag{5.11}$$

である．このCの値はω_0とνとの比に依存する．

はじめに，不等式

$$\nu/\omega_0\lesssim 1, \tag{5.12}$$

が成り立つ場合を考えよう．時間Δtの間に，xと$\dot{x}$が0でない値をとる特性的時間がπ/ω_0であることに注意すると，（5.11）式の積分は近似的に，

$$C\approx V\frac{\nu}{\omega_0}\approx V\approx H_c\approx\omega_0^2$$

となる．これを（5.10）式に代入すると，

$$K\approx\frac{\pi\nu\varepsilon\omega_0^2|\omega'|}{\omega^3}. \tag{5.13}$$

が得られる．ω' は，(1.16) 式から容易に次のように計算である，

$$|\omega'|=\left|\frac{d\omega}{dI}\right|=\left|\frac{d\omega}{dH}\right|\left|\frac{dH}{dI}\right|=\omega\left|\frac{d\omega}{dH}\right|$$
$$\approx\frac{\omega^3}{\omega_0}\frac{1}{H_c-H}. \tag{5.14}$$

これを (5.13) 式に代入すれば，K に対する評価式，

$$K\approx\varepsilon\nu\omega_0\frac{1}{H_c-H}=\varepsilon\frac{\nu}{\omega_0}\frac{H_c}{|H_c-H|}, \tag{5.15}$$

が導かれる．この評価式 (5.15) によって，ストカスティックな領域を規定する条件，すなわち，$K\gtrsim 1$ の条件が，

$$\frac{|H_c-H|}{H_c}\lesssim\varepsilon\frac{\nu}{\omega_0},\quad(\nu\lesssim\omega_0), \tag{5.16}$$

と表わされる．

つぎに，摂動の振動数が大きい場合，つまり，(5.12) 式と逆の不等式，

$$\nu\gg\omega_0 \tag{5.17}$$

が成り立つ場合を考えよう．この場合，(5.11) 式の被積分項が，速やかに振動する関数 $\sin\nu t$ とゆっくり変化する関数 $\dot{x}\,\partial V/\partial x$ との積であることに注意して，積分を実行すると，

$$C\approx H_c\exp\left(-\pi\frac{\nu}{2\omega_0}\right)$$

を得る [86]．この C についてのもっと詳しい計算は文献 [87]，[15] および [48] でなされている．また，これらの文献には (5.16) 式を導いたのと同様の手続きによって，系のストカスティックな領域を規定する条件が，

$$\frac{|H_c-H|}{H_c}\lesssim\varepsilon\frac{\nu}{\omega_0}\exp\left(-\frac{\pi\nu}{2\omega_0}\right),\quad\nu\gg\omega_0, \tag{5.18}$$

と与えられている．

以上のことから，セパラトリックスの近傍においてはいつでも，つまり任意の値の ε と ν の場合に，ストカスティックな層すなわち混合性の軌道領域が存在し得ることがわかる．しかし，そのストカスティックな層の相対幅は，摂動の振動数があまり大きくない場合〔(5.12) 式の場合〕には，$\varepsilon\nu/\omega_0$ の形で 0 に近づき，他方，振動の振動数が大きい場合〔(5.17) 式の場合〕には，指数関数的に〔(5.18) 式に従って〕 0 に近づく．

5.2　ストカスティックな層：その形成過程の特性

セパラトリックスの消滅領域の定性的分析，非線型共鳴の消滅，磁気面の消滅．

前節の一連の計算結果から，摂動が時間に依存すると，ストカスティックな層の幅が増加することがわかった．

位相空間のセパラトリックス上の双曲型特異点はセパラトリックスの消滅過程で特に，重要な役割を果たす．運動の“停留”がみられるのは正にこの特異点の近傍においてである．その近傍では，振動の周期が極めて大きくなる（振動数は0に近づく）．したがって，たとえ小さな摂動であっても，軌道が振動を受ける回数が多くなるので，軌道は実質的に強い摂動をうけることになる．この辺の事情を数学的に検討してみよう．また，議論に変化をもたせるため，共鳴の重複条件を用いて，セパラトリックスが消滅する領域を評価してみる［88, 13］．

運動方程式としては，次の形のものをとろう．

$$\dot{H}=\varepsilon F(x,t)=\varepsilon\omega_0\sum_n\left(V_ne^{i(n\theta-\nu t)}+V_ne^{i(n\theta+\nu t)}+\mathrm{C.C.}\right),$$

$$\dot{\theta}=\omega(H)+O(\varepsilon). \tag{5.19}$$

摂動と共鳴する条件は，

$$n\omega(H_n)=\nu, \tag{5.20}$$

と書ける．この条件から，1つの共鳴と隣の共鳴との間隔 $\delta\omega$ は，

$$\delta\omega=|\omega(H_{n+1})-\omega(H_n)|=\frac{\nu}{n}-\frac{\nu}{n+1}\approx\frac{\nu}{n^2}=\frac{\omega^2}{\nu} \tag{5.21}$$

で与えられる．一方，共鳴の幅の近似的表式は次の簡単な計算によって求められる．まず，(5.19) 式の右辺において，共鳴条件を満たす項を選んで，

$$\dot{H}\approx\varepsilon\omega_0V_ne^{i(n\theta-\nu t)}+\mathrm{C.C.} \tag{5.22}$$

と置く．次に，共鳴条件 (5.20) 式から，

$$\frac{d}{dt}(n\theta-\nu t)=n\dot{\theta}-\nu\approx 0$$

であることに注意して，(5.22) 式を時間について積分すると，

$$\Delta H\approx\varepsilon\omega_0V_n\int_{t_1}^{t_2}dt'e^{in\Delta\omega t'}+\mathrm{C.C.},$$

$$=\frac{\varepsilon\omega_0V_n}{n\Delta\omega}\Big[2\sin n\Delta\omega t'\Big]_{t_1}^{t_2},$$

$$\approx \frac{\varepsilon\omega_0 V_n}{n\Delta\omega} = \frac{\varepsilon\omega_0 V_n}{\nu\Delta\omega}, \tag{5.23}$$

を得る．ここで，ΔH と $\Delta\omega$ は，それぞれ，摂動によって生じるエネルギーと振動数のずれを表わす．また，$\Delta\omega$ と ΔH との関係は，

$$\Delta\omega = \left|\frac{d\omega}{dH}\right| \Delta H$$

と書ける．これを (5.23) 式に代入すれば，振動数のずれ，すなわち，共鳴の幅 $\Delta\omega$ の表式が次のように得られる，

$$\Delta\omega \approx \left(\frac{\varepsilon\omega_0\omega}{\nu} V_n \left|\frac{d\omega}{dH}\right|\right)^{1/2} \tag{5.24}$$

〔この (5.24) 式と (1.32) 式を比較してみよ〕．(5.21) 式と (5.24) 式から，共鳴が重複する条件は，

$$K = \bar{K}^2 = \left(\frac{\Delta\omega}{\delta\omega}\right)^2 \approx \frac{\varepsilon\omega_0\nu}{\omega^3} V_n \left|\frac{d\omega}{dH}\right| \gtrsim 1, \tag{5.25}$$

と表わせる．これまでの議論では，軌道がセパラトリックス近傍に位置しているという条件がまだ使われていない．セパラトリックス近傍の軌道の性質については 1.2 節で詳しく述べた（図 1.4 を参照）．そこでの議論によると，$F(x, t)$ の θ についてのフーリエ展開式〔(5.19) 式〕が，N 個程度の近似的に等しい振幅の調和振動を含むことがわかる．ただし，N は (5.6) 式で与えられる値を意味する．したがって，次の関係式が近似的に成り立つ，

$$V_n \approx \frac{H}{N} \approx \frac{H_c}{N} \approx H_c \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{5.26}$$

いま考えている調和振動の番号 n は，当然，$n \lesssim N$ の範囲内にある．この制限は，(5.20) 式によると，$\nu \lesssim \omega_0$ という条件に相当する．つまり，いま考えているのは前節の不等式 (5.12) が成立する場合にあたる．(5.26) 式を (5.25) 式に代入すると，結局，共鳴が重複する条件は，

$$K = \frac{\varepsilon\nu}{\omega^2} H_c \left|\frac{d\omega}{dH}\right| \gtrsim 1 \tag{5.27}$$

で表わされることがわかる．上式 (5.27) では，系の個別的な性質の違いが全て $\omega(H)$ の中に吸収されている．ところで，この依存性は，とくにセパラトリックスの近傍では，ある普遍的な形をもつ可能性がある．それを調べるために，セパラトリックス近傍での $\omega(H)$ の振舞をもっと詳しく分析してみよう．

一般に振動運動の振動数は次の表式によって与えられることが知られている [22]，

$$\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{dx}{[2(H-V(x)]^{1/2}}. \tag{5.28}$$

H と H_c との差を $\varDelta$ で表わすと，軌道がセパラトリックスの近傍に位置することは次の条件で表現できる，

$$\varDelta=|H-H_c|\ll H_c. \tag{5.29}$$

一方，(5.28) 式の分母は，一般に次の形に書き換えることができる，

$$[H-V(x)]^{1/2}\approx[(x-x_a)(x-x_b)(x-x_1)\cdots(x-x_n)]^{1/2}\chi(x). \tag{5.30}$$

ここで，x_a と x_b は2つの転移点を表わし，実際の運動はこれらの2点の間で行われるとする．また，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は，いま，セパラトリックスの特異点 x_a の近傍を考えるとして，x_a の近傍に位置する他の転移点を表わす．さらに，$\chi(x)$ は，実際の運動の範囲には零点をもたない関数である．

セパラトリックスの近傍では，(5.30) 式の解は，少なくても2重に縮退している，言い換れば，(5.30)式は，$x=x_a$ の近くで，$(x-x_a)^{(n+1)/2}(x-x_b)^{1/2}\chi(x)$ $(n\geq 1)$ の形になる．このことと (5.29) 式を考慮して，(5.28) 式の積分を近似的に計算すると，次の評価式が得られる，

$$\frac{1}{\omega}\approx\frac{1}{\omega_0}\times\begin{cases}\log\dfrac{H_c}{\varDelta}, & n=1\\ \left(\dfrac{\varDelta}{H_c}\right)^{-(n-1)/2}, & n>1.\end{cases} \tag{5.31}$$

この評価式を用いて，$d\omega/dH$ を求めると，

$$\frac{d\omega}{dH}\approx\begin{cases}\dfrac{\omega^2}{\omega_0\varDelta}, & n=1,\\ \dfrac{\omega}{\varDelta}, & n>1.\end{cases} \tag{5.32}$$

が得られる．(5.31) 式と (5.32) 式を (5.27) 式に代入することにより，ストカスティックな層の幅に対する表式として，

$$\frac{\varDelta}{H_c}\lesssim\left(\varepsilon\nu\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2}{(n+1)}}, \quad n\geq 1, \tag{5.33}$$

が与えられる．$n=1$ の場合，この表式は (5.16) 式と同じになり，また，$n\to\infty$ の場合は，ストカスティックな層の相対的な幅が1に近づくことがわかる．

こうして，我々は，まずセパラトリックスがストカスティックに破壊され，つづいて，その近傍にストカスティックな層が生成されることをみたが，これの当然の帰結として次の重要な推論が成り立つ．1.3節で，非線型共鳴の場合には，摂動が1種のセパラトリックスを発生させることをみた（図1.8と図1.9を参照）．その時の取り扱いでは非共鳴項を無視したが，もしも，これらの項を考慮に入れ

るならば，これらの項はセパラトックスを破壊する働きをすることが期待できる．したがって，ストカスティックな層が生成されることが予想される．そのストカスティックな層の幅は指数関数的に小さいであろう，というのは，非共鳴項の振動数は位相振動の振動数に較べて非常に大きいからである〔(5.18) 式を参照〕．それで，非線型共鳴は，常にこれらの狭いストカスティックな層に“包み込まれる”ことになるであろう（付録 2 を参照）．

本節を閉じる前に，セパラトリックス近傍のストカスティックな振舞と密接に関連した問題として，磁気面の消失の問題に簡単にふれておこう．この問題は，元々は磁気的手段によるプラズマの閉じ込めの可能性を探る研究から生まれたが，最近になって，初期の狭い応用面を越えて広い内容を含む問題に成長している．

問題の物理的描像は次のようになる．プラズマの荷電粒子が磁場中を運動するとき，粒子の軌道は，中心線が近似的に磁力線と一致する螺旋曲線になる．磁場の形が変形すると，あたかも螺旋曲線が磁力線にへばりついているように，磁力線の変形に応じて螺旋軌道が変形する．したがって，プラズマの荷電粒子を閉じ込めるためには，磁力線の存在する領域が有限になるように磁場構造を工夫すればよい．磁場が，ある理想的な幾何学的構造であると，磁力線が磁気面といわれる曲面上にからみつくようになる．この曲面は力学系の不変トーラスに対応する．しかし，現実の磁場の幾何学的構造は理想的なものからずれるので，磁気面の安定性の条件や消滅を考察することは，ハミルトニアン系の不変トーラスの安定性や消滅に関する問題と全く同じになる．

形式的には，この問題は次のように定式化される．方程式，

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0.$$

をみたす磁場 $\vec{B}\,(B_x,\ B_y,\ B_z)$ の磁力線の方程式は，

$$\frac{dx}{B_x}=\frac{dy}{B_y}=\frac{dz}{B_z},$$

で表わされる．これはまた，次のようにも書ける，

$$\frac{dx}{dz}=\frac{B_x(x,y,z)}{B_z(x,y,z)},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{B_y(x,y,z)}{B_z(x,y,z)}. \tag{5.34}$$

いま，系がある対称性をもち，そして方程式 (5.34) が 1 つの積分をもつとしよう．その場合を

$$H=H(x,y,z). \tag{5.35}$$

と置くと，この (5.35) 式は，

$$z=z(x,y,H)$$

という曲面群を規定する．この曲面が磁気面であり，磁力線はこの曲面にからみついている．さて，ここで，“時間”変数 t を次式によって導入すると，

$$\frac{dz}{dt}=B_z(x,y,z),$$

となり，(5.34) 式は次のように書き換えられる，

$$\frac{dx}{dt}=B_x(x,\ y,\ z\,(x,\ y,\ z)),$$

$$\frac{dy}{dt}=B_y(x,\ y,\ z\,(x,\ y,\ z)). \tag{5.36}$$

このように (5.35) 式の積分が存在し，そして，z が $z(x,\ y,\ H)$ と書けるならば，方程式系 (5.36) がハミルトニアン形式になることが示される [88]．したがって，いまの問題は通常の力学系の問題に帰着する．次に，(5.35) 式に摂動項が加わった場合を考える．

前述の議論から，その場合まず，磁気面のセパラトリックスが破壊されると考えられる．その破壊領域を評価してみよう．問題をもっと具体的に設定するために，無摂動磁場は，n 対の円筒に対称的に巻きつけられた電流によって生じているとしよう．螺旋状の磁場のスカラーポテンシャルを円筒座標で表わすと，

$$\Phi=B_0z+bI_n(nr)\sin n(\varphi-z),$$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\Phi, \tag{5.37}$$

となる．ただし，B_0 と b は定数であり，I_n は虚数変数のベッセル関数である，また，螺旋のピッチは1にとってある．さて，ここで1つの量 H および新しい変数 ρ と θ を，

$$H=\frac{1}{2}r^2-brI_n'(nr)\cos n\theta \tag{5.38}$$

および，

$$\rho=\frac{1}{2}r^2,\quad \theta=\varphi-z$$

によって定義すると，直接の計算によって，方程式，

$$\dot\rho\equiv\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\theta},\ \dot\theta\equiv\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\rho},$$

が成り立つことが示される．したがって，(5.38) 式で定義された $H(\rho,\theta)$ が系のハミルトニアンになる．例として，$n=3$の場合の位相空間軌道を図

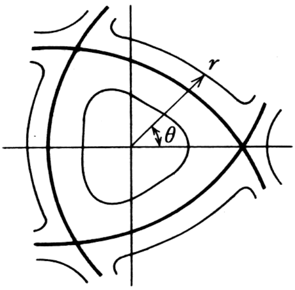


図 5.2　$n=3$ での螺旋状の磁場の磁気面

5.2に示した．この図の曲線は，t=定数の平面と磁気面との交線を表わしている．ところで，現実の条件下では，磁場を発生させる導線がトーラス上に巻きつけられている．そのため実際には，磁場に

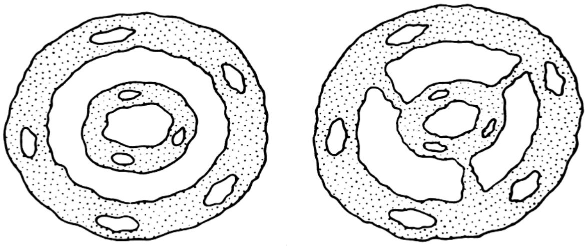
$$\varepsilon \approx r_0/R$$

程度の摂動が生じる．ここで，r_0 と Rは，それぞれ，トーラスの大径と小径である．この摂動が磁気面の破壊領域を決定するのである．

5. 3 位相空間におけるストカスティックな消滅の一般的パターン

共鳴とストカスティックな領域．位相空間の“ストカスティック量子”．安定性の島の源．運動の積分の消滅．ポアンカレの定理に関する注意．2つの例：二つの平面波の場の中の粒子と波束の場の中の粒子の運動．

我々は現在，ハミルトニアン系のストカスティシティの発生機構を論じるための知識を十分にもっている．はじめに，摂動の1次の項が共鳴項と非共鳴項に分けられる場合を考えよう．共鳴項は非線型共鳴のセパラトリックスとこれに関連した幾つかの双曲型特異点または楕円型特異点を生成する．それぞれのセパラトリックスの近傍では，ある幅のストカスティックな層が形成される．特に，共鳴のセパラトリックスが互いに近接している場合には，幾つかのストカスティックな層が併合するため，一層広い幅のストカスティックな領域が形成される．このように，セパラトリックスの各細胞は，はじめ極く小さなストカスティックな領域として“生まれる”．これは，いわば，“ストカスティック量子”と呼んでよい．これらの“ストカスティック量子”が幾つか併合して，位相空間における“ストカスティックな海”を形成するのである．この“ストカスティック量子”は極めて複雑な構造をもっている．その中心（すなわち，消滅したセパラトリックスの細胞の中心）には，楕円型特異点によって作り出された安定性の島が常に内在している．事実，楕円型特異点の近傍には，不変トーラスの消滅の限界値よりも非線型性が小さい値にとどまるような領域が必ず存在する．したがって，この安定性の島（領域）ではKAM定理が成り立つ．これは，トーラスが消滅してストカスティックになった層の内部にさらに不変的トーラスの島が存在することを意味する．これらのことは全て摂動の1次の項までの分析にもとづいている．もっと高次の摂動項を考慮に入れると，その次数の安定性を表わす島の内部に，



(a) (b)

図 5.3 運動の積分がストカスティックに破壊された領域の構造
(a)は $N=2$, (b)は $N\geqq 3$ の場合（Nは自由度の数）

その次数の摂動の非線型共鳴によって新しいセパラトリックスが形成される．これらのセパラトリックス上にまた新しいストカスティックな層が生まれる．さらに，その層の内部にもっと高次の安定性の島が含まれる，ということが繰り返されるであろう．このときのパターンを図5.3に示した．これらの図は，自由度Nが$N=2$の場合と $N\geq 3$ の場合とでは質的に異なっている．すでに1.4節において，トーラスが空間を2つの部分に完全に分離できるのは $N=2$ の場合だけであることを指摘した．したがって，この場合だけ，1つの安定領域が他の安定領域と分離する．また，この場合，系の初期条件が1つの安定領域に属しているならば，系は常に他の領域と無関係にとどまる．しかし，$N\geq 3$ の場合には，このようなことは言えない．$N\geq 3$ であると，トーラスは位相空間の中で互いに交わることが可能になる．それ故，共鳴トーラスも互いに交わる．全ての共鳴トーラスには，少なくても指数関数的に小さくなるストカスティックな層が"付着している"ので，ストカスティックな領域がくもの巣のように全位相空間を張りめぐるようになる．なお，摂動の全ての次数の可能な共鳴を考慮に入れると，ストカスティックな領域が，ほとんど到る所で稠密になるという事実を指摘しておく．したがって，このような場合，位相空間はストカスティックな極めてこまかいネットワークで覆われることになる．そして，系は，その径路を通じて，初期状態から遠く離れた状態に移行することが可能になる．この過程がまさしく1.4節で述べたアーノルド拡散の機構である．

ここで，上述の議論の要点をまとめると次のようになる．

1. 共鳴が重複することは，ストカスティックな層の併合を意味する．そして，このことによって，共鳴の重複条件が系のストカスティシティのための条件に対応することがよく理解できる．

2. ストカスティックな層の境界は極めて込み入った複雑な構造をもってい

る．その構造は境界の近傍の不変トーラスの形に影響をおよぼす．また，位相空間における不変トーラスの分布は（有理数の集合のように）稠密であるので，不変トーラスは，常に，隣接するストカスティックな層の影響を受ける．それ故，一般的に，消滅しない不変トーラスの形も，無摂動のときの形に解析的な項をつけ加えただけでは表わすことのできない極めて複雑な形になる．これによって，任意に小さい摂動があると，ハミルトニアン以外の1価で解析的な運動の積分は存在しないというポアンカレの定理の意味が明確となる．したがって，たとえば，非線型共鳴において，摂動の1次の取り扱いでたまたま見い出された解析的な運動の積分などは1つの粗い近似にすぎない（しかし，実際上はそれで十分である場合も多い）ことがわかる．

3. 不変トーラスの消滅はそれに対応する運動の積分の消滅と等価である．したがって，このような現象は，運動の積分のストカスティックな消滅であると言ってよい．その例として，ヘノン（M. Henon）とハイル（C. Heiles）が数値計算によって示した運動の積分の消滅の場合をあげておく［89］．彼等は，連結した2個の振動子系のハミルトニアンとして，

$$H=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+x^2y-\frac{1}{3}y^3,$$

をとり，このハミルトニアンで表わされる運動をポアンカレ写像の方法で数値解析した．位相空間上のエネルギー E をもつ軌道と平面 $x=0$ との交点の $(y, \dot{y})$ の値が1つの平面にプロットされた．E の値が充分に小さい場合には，それらの点は幾つかの閉曲線上に集束した（図5.4(a)を見よ）．これは，（エネルギーのほ

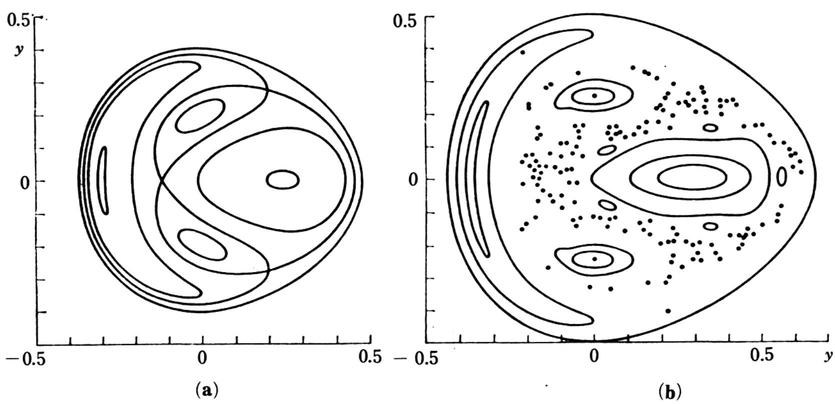


図 5.4 ヘノン－ハイルモデルでの位相軌道：(a) $E=0.08833$. (b) $E=0.125$.

かに）もう1つの運動の積分が存在することを意味する．$E>1/12$ になると，一部の曲線が破壊されるのが見られる．図5.4(b)は，$E=0.125$ の場合の点の分布（軌道）を表わしている．この図は，幾つかの軌道がストカスティックになるが，まだ，安定性の島の領域がかなり大きいことを示している．E の値がさらに増大すると，安定性の島は除々に小さくなり，$E=0.1667$では，位相空間のほとんどの部分がストカスティックな運動の領域になる（注釈3を参照）．

最後に，共鳴の重複の結果としてストカスティックな層が併合するとき，大きなストカスティックな領域が形成される様子を示す2つの例を述べておこう．

まず，2個の平面波の場の中で運動する粒子を考える [87]．運動方程式は次式で与えられるものとする，

$$m\ddot{x}=-eE_0\sin k_0x-eE_1\sin(k_1x-\nu t). \tag{5.39}$$

ここで，E_0 で表わされる場の中の粒子の運動は無摂動運動として取り扱い，E_1 で表わされる場は摂動として取り扱う．運動方程式（5.39）は，第1の波動とともに運動する座標系で記述した形式であり，プラズマ物理学ではしばしば使われる形式である．新しい記号，

$$\xi=k_0x,\quad \omega_0^2=\frac{e}{m}E_0k_0,\quad \varepsilon=\frac{E_1}{E_0}\ll 1,$$

を用いて，(5.39) 式を書き換えると，次の方式程が得られる，

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2\sin\xi=-\varepsilon\omega_0^2\sin\left(\frac{k_1}{k_0}\xi-\nu t\right). \tag{5.40}$$

この方程式（5.40）は，ハミルトニアン（5.1）から導かれる運動方程式とよく似た形になっている．その違いは，摂動の位相を表わす項に $k_1\xi/k_0$ という部分の有無だけである．しかし，この部分は本質的な役割をはたさないので，第1節の議論がそのままここでも使える．たとえば，セパラトリックス近傍のストカスティックな層の幅が ν/ω_0 の値によって規定されるということも，第1節の議論と同様である．そして，次のような極限，

$$\varepsilon\to 1,\quad \frac{\nu}{\omega_0}\to 1 \tag{5.41}$$

の場合を考えると，セパラトリックスの細胞は全て完全に破壊され，ストカスティックな層の幅がセパラトリックス自体の幅 ω_0 と同程度になることも期待できる．この場合，2個の共鳴は重複しており，また，個々の平面波内の運動はそれぞれの非線型共鳴状態にあると考えられる．

第2の例として，波束の場の中で運動する粒子を考えよう．運動方程式は次式で与えられるものとする，

$$\ddot{x}=\frac{e}{m}\sum_k E_k\cos(kx-\omega_k t). \tag{5.42}$$

新しい記号，

$$v=\dot{x},\quad V_k=\frac{e}{m}E_k,\quad \theta_k=kx-\omega_k t,\quad \omega_k(v)=kv-\omega_k$$

を用いて (5.42) 式を表わすと，(5.42) 式は次の方程式系に書き換えられる，

$$\dot{v}=\sum_k V_k\cos\theta_k,$$
$$\dot{\theta}_k=\omega_k(v). \tag{5.43}$$

この方程式 (5.43) は，記号の違いを別にすれば，(5.19) 式と同じ式である．以下では，2つの変数 $(v,\ \theta)$ を互いに正準共役な変数とみなし，v を作用変数として取り扱う．多数の共鳴をもつ場の中の運動を記述するいろいろな方程式のなかで，方程式系 (5.43) 式が最も簡潔で正確な形式である．とくに，(5.43) 式が表わす個々の共鳴の位相関係は1個の振子に対応するものになっている．言い換えれば，(5.43) 式によると，ある波数の波動と粒子の共鳴を記述する位相が，他の全ての波数を無視して，あたかも，その波数をもつ1つの波動の中で粒子が運動しているかの如く取り扱ったときの位相と同じになるということである（図5.5を参照）．

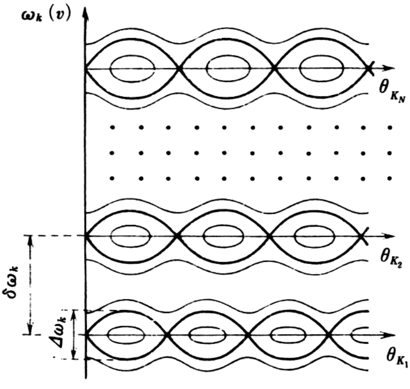


図 5.5 N個の波で構成された波束の場のなかの粒子の位相軌道．N個の共鳴がある場合の粒子の軌道に類似している．

さて，これらの共鳴の重複条件を導こう．まず，(5.24) 式からの類推によって，共鳴の幅 $\Delta\omega_k$ を求める．ある共鳴の近傍での作用変数 v の最大変化は，

$$\Delta v_k\approx\int dt V_k\cos\theta_k\approx\frac{V_k}{\Delta\omega_k(v)}$$

と評価される．一般的に，$\Delta\omega$ と Δv との関係は，

$$\Delta\omega=\left|\frac{d\omega}{dv}\right|\Delta v$$

と書ける．上記の2個の式から，共鳴の幅に対する表式，

$$\Delta\omega_k(v)\approx\left(V_k\left|\frac{d\omega_k}{dv}\right|\right)^{1/2}=(kV_k)^{1/2}=\left(\frac{e}{m}kE_k\right)^{1/2} \tag{5.44}$$

が得られる．これは予想された結果である．というのは，共鳴の幅は位相の振動の振動数と一致する筈であるが［(1.32) 式と (1.34) 式をみよ］，いまの場合，後者の振動数が1個の平面波の場の中の微小振幅振動の振動数と同じだからである（これと同様なことが (5.40) 式についても言える)．

隣り合った2つの共鳴の間の間隔 $\delta\omega_k$ は，波束に含まれる波数 k の値によって決められる．隣接した2つの k の間隔の代表的な値を Δk とすれば，共鳴の間の間隔 $\delta\omega_k$ は，

$$\delta\omega_k=\omega_{k+\Delta k}(v)-\omega_k(v)=\Delta k\left(v-\frac{d\omega_k}{dk}\right),$$

となる．これと (5.44) 式を考え合せれば，結局，ストカスティシティの条件は，

$$K=\left|\frac{\Delta\omega_k}{\delta\omega_k}\right|^2=\frac{\frac{e}{m}kE_k}{(\Delta k)^2\left|v-\frac{d\omega_k}{dk}\right|^2}\gtrsim1, \tag{5.45}$$

と表わされる．

粒子の速度が ($v_{\min}$, $v_{\max}$) の範囲にあるとき，波束を構成する全ての成分波の群速度 $d\omega_k/dk$ にたいして，条件式 (5.45) が成り立つならば，位相 θ_k は完全に乱雑になり，そして，粒子の運動はブラウン運動的になる．

以前に（第4章の注釈3を参照)，$K\gg1$ で，共鳴が極めて強く重複する場合には，多数の共鳴が強く縮退して，事実上1個の共鳴に集束してしまうために，ストカスティックな層が狭まくなるとともに境界がはっきりしたものになる，ということを述べた．このような縮退が生じないための条件は，

$$K\lesssim N, \tag{5.46}$$

である．ただし，Nは波束に含まれる波の数である．なお，非線型プラズマ理論では，条件式 (5.45) と (5.46) は，一般に，いわゆる準線型近似が有効であるための条件になっている．

5.4　セパラトリックス近傍のホモクリニック構造

セパラトリックスの分離，ホモクリニック点，ストカスティシティの同型性，K系についての補足

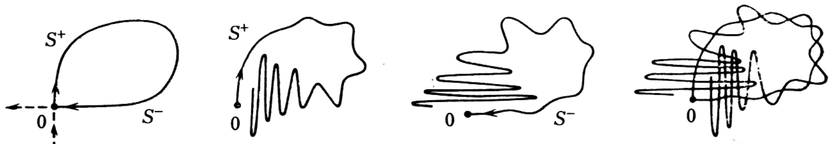


図 5.6 セパラトリックス近傍のホモクリニック構造の形成

この節では，消滅するセパラトリックス近傍の軌道について，これまでの議論では現われて来なかったのもう1つの性質を極く概略的に説明しよう．

まず，図 5.6(a) に示したような双曲型特異点Oをもつセパラトリックスの一つのループを考えよう．このようなセパラトリックスは，たとえば距離の3乗の依存性をもつポテンシャルの中を粒子が運動する場合に現われる．この図のセパラトリックスの二つの"猫ひげ"に注目する，すなわち，1つは点Oから遠ざかる曲線（S^+）であり，他の1つは点Oに近づく曲線（S^-）である．系に加わる周期的な摂動が極く小さいときは，双曲型特異点自体は安定である [91]．このことは次の定性的な考察によって理解できる．一般に，双曲型特異点の近傍の軌道は全て本来的に不安定である．そこに極めて小さい摂動が作用しても，摂動だけが原因で，軌道に新たに強い不安定性が発生することは無い筈である．つまり，その小さい摂動によって，双曲型特異点が位置を変えたりあるいは消滅したりすることはない．双曲型特異点のこの種の安定性と同様の安定性が，"猫ひげ"の双曲型特異点の近傍の小部分についても保証される（もし，"猫ひげ"のその小部分が消滅するとすれば，それは，双曲型特異点が消滅することを意味する）．したがって，摂動が作用しても，Oに極めて近い"猫ひげ"の部分は不変的な曲線S^+あるいはS^-として保たれる．しかしながら，摂動が作用している場合，Oから遠く離れた部分のS^+とS^-については何も制約はない（摂動がなければ，それらは1のループを構成する）．

このようなことから，"猫ひげ" S^+ と S^- が個々に自分自身では閉じない場合が考えられる（これは，セパラトリックスの分離と呼ばれる）．摂動が周期的であるので，一般的に，"猫ひげ" S^+ と S^- も振動する．曲線がS^+に沿ってOから遠ざかると，S^-の領域にはいり，再びOに近づく．このとき，曲線がOに近づくにつれて，その振幅は次第に大きくなる，それとともに，"進む歩幅"は小さくなる（図5.6(b)）．この振幅の増加（不安定性）は，出発点の安定点Oから位置が遠く離れているので許されるのである．また，Oに近づくと"進む歩幅"が

減少するのは，Oの近くでは速さが小さくなるからである．“猫ひげ”S^-に沿ってOから遠ざかる場合にも上述と同様の描像を描くことができる，ただし，この場合には，図5.6(c)の矢印と逆の向きに進むことになる〔これは時間を逆転したときの運動に相当する〕．“猫ひげ”S^+とS^-の性質がこのような振舞であると，それらはO以外の点M_1で交わる可能性がある．この交点M_1はホモクリニック点と呼ばれる．これについて大事な事実を指摘しておこう．ホモクリニック点が1個でも存在するならば，実はホモクリニック点は無限に多く存在するということが証明できる．

この証明は“猫ひげ”S^+とS^-の不変性にもとづいている．いま，時間をTだけずらす時間移動の演算子$\hat{T}$を考える．この演算子を一つのホモクリニック点M_1に作用させて，次式を得たとする，

$$M_2=\hat{T}M_1.$$

これは，点M_1をT時間後に点M_2に移すことである．曲線の不変性というのは，Tを適当にとった（いまの場合，Tを振動の周期に等しくとってある）変換によると，曲線上の点は，変換後もその曲線上の点であることを意味する．いまの場合，M_2は“猫ひげ”S^+上の点でもあるし，同じ理由で“猫ひげ”S^-上の点でもある．つまりM_2はS^+とS^-との交点であり，したがって，ホモクリニック点である．このような変換を繰り返すことにわって，無限個のホモクリニック点が存在することがわかる．図5.6(d)に，ホモクリニック点が現われる様子の一部分を図示した．

大事な点は，摂動が加わると，ホモクリニック点が実際に発生するということである．この事実は，ポアンカレによって三体問題が分析された時，初めて発見された[49]．ポアンカレは，ホモクリニック点の複雑性について，“その構造の複雑さにうんざりして，私はその概略さえ書く気にならない”と述べている．図5.6(d)は，無論，位相平面のホモクリニック点についての完全な図ではない．この図は，いわば，その第0近似にすぎない．何故ならば，ホモクリニック点の近傍には，実は，もっと次数の高い振動が存在する筈であるが，この図にはそれが描かれていないからである．現在では，ホモクリニック点の分布が厳密な意味で極めて乱雑であることが明らかになっている．これらの結果は，また，記号力学といわれる力学系の新しい研究方法の開発に多大な刺激を与えている（注釈4を参照)．残念ながら，その方法が複雑なので，少なくても現時点では，それの物理的な分析は困難である．それでも，次の定性的な議論は有効であろう．

ホモクリニック点の完全な集合をホモクリニック“構造”と呼ぶ．2つの異なった系の双曲型特異点が集合として一致するとき，これら2つの系は位相幾何学的に等価なホモクリニック“構造”をもつという．このとき，2つの系の位相空間軌道のストカスティックな振舞の法則性は同じになる，言い換えれば，2つの系は同型である，といってよい．多数の共鳴が重複するために非常に多くの双曲型特異点が1つのホモクリニック“構造”を形成する場合，特異点の数が膨大であるので，特異点の厳密な数はあまり本質的な意味をもたなくなることが考えられる．したがって，多数の強く重複する共鳴（$K \gg 1$）をもつハミルトニアン系の場合，これらの系が同じ次元数を持ち，かつ，近似的に等しい K の値を持つならば，これらの系は同型であると考えられる．なお，$K \gg 1$ の場合には，ストカスティックな運動に種々の変化をもたらす安定性の島は，測度の非常に小さい（$\sim 1/K$）分布になることに注意しよう（注釈5を参照）．

第5章に関する注釈

1. 摂動が，セパラトリックスの消滅にともなって非常に複雑な構造（本章の最後のところで論じる，いわゆるホモクリニック構造）をもたらすことは，すでに，ポアンカレによって知られていた．その構造の分析には多くの困難がともなうが，メルニコフ（V.K. Mel'nikov）によって消滅領域の幅についての計算が初めて行われた．またセパラトリックス近傍における消滅過程がストカスティックな性格をもつことが文献［88］で初めて示唆された．この文献［88］では，ストカスティックな層といわれる領域の内部に局所的不安定性が存在すること，また，その層の内部での粒子の運動が拡散型であること，さらに，ストカスティシティの条件を用いて層の幅を計算できること，などが論じられいる．数値解析にもとづいて，この種の研究が進み［88］，現在では，摂動パラメーターと系のパラメーターのいろいろな場合について，セパラトリックスの消滅領域の幅の計算が可能になっている［87, 13, 14, 15］．

2. 磁気面の問題の詳しい議論はモロゾフ（A.I. Morozov）とソロビィエフ（L.S. Solovyev）による総合報告［93］にみることができる．力学系の運動の積分と安定性との関係はアーノルド（V.I. Arnold）［53］とモゼール（J.K. Moser）［21］によって調べられた．磁気面のストカスティシクな消滅という結果は文献［94］と［88］で導かれている（なお文献［13］も参照せよ）．

3. 天体力学の問題で，いわゆる第3積分の消滅に関して，これと同様の描像をコントポウロス（G. Contopoulos）が数値計算で導いている［207］．運動の積分の消滅をエレガントに示す1つの例がカサティ（G. Casati）とフォード（J. Ford）による数値解析でみられる［95］．彼等は，座標の差の指数関数で表わされるポテンシャルの中を質量の異なっ

た2個の物体が運動する場合を数値解析した.

4. 記号力学の方法は，スメール（S. Smale）による基礎的論文［96］が刺激となって発展したが，現在もなお進展中である（ニテスキ（Z. Nitecki）の文献［97］を参照）. ホモクリニック点の基本的概念についての議論が文献［98］と［97］で詳しく展開されている. 力学系のストカスティックな性質を記号力学の方法で研究することはアレクゼェフ（V.M. Alekseev）によって行われている［99, 100］.

5. 本文中の K 系および同型という概念は（数学的な意味で）厳密なものでないことに注意されたい. これらを厳密に取り扱おうとすると，現実の力学系の性質との不一致が生じるので，ある種の困難に遭遇する. したがって，我々が用いる“同型”とが“K系”という言葉は，厳密に詳細な議論に立ち入らなくても，その言葉の使用が許されるような物理的対象に対してのみ有効である. ストカスティシティをこのような方法で理解することの是非は実験にまつほかないが，実際，広範囲の（現実的または数値解析的）実験結果は上述の考え方を支持している. 最後に，我々がこれまで論じてきた物理系はハミルトニアン系だけであることを再度強調しておく.

6章　混合性と運動論的方程式

運動論的方程式という考え方は1872年にボルツマン（L. Boltzmann）によって初めて導入された．通常，その考え方は，不可逆過程が明瞭に現われる物理系を記述する1つの方法を意味する．ボルツマンは，不可逆の性質を系のエントロピーの非減少性を表わす H 定理の形で表現した．その後，H 定理の条件をみたす方程式の構造がそれ程込み入ったものではないことが判明し，現在では，その構造はよく知られている（たとえば，文献［1］～［12］を参照）．いろいろな具体的応用面に限らず，その原理的側面の研究に促されて，物質の運動論的記述を目的とした文献と論文の数は今や，膨大な数にのぼり，その発展に関心をもつ物理学者の数も増すことはあって減ることはない．その理由は，運動論的方程式が物理学において占める特別な位置にあると思われる．ボルツマンの当時，彼は種々のきびしい批判から自分の理論を防衛しなければならなかったが，今日では，運動論的方程式と物質の運動論的記述に疑問をもつ者はいない．今や，問題はこれらの方程式を用いることがどのような場合にどのような（具体的）条件で正当化されるかを見い出すことである．

現代的エルゴード理論の成果はこの問題の解明にあたって本質的な役割を果した．本章と次章は，この問題とそれに関連したことについて説明しよう．

6. 1　運動論的記述の原理

記述の縮約，二つの縮約法，マスター方程式，ボルツマン型方程式，ボゴリューボフの考え方，相関消滅の原理と乱雑位相近似．

運動論的方程式を導出するときの一般的な出発点は次のリュービル方程式である，

$$i\frac{\partial f(p_1, q_1; \cdots; p_N, q_N)}{\partial t}=\hat{L}f(p_1, q_1; \cdots; p_N, q_N). \tag{6.1}$$

ここで，$\hat{L}$ はリューブビル演算子といわれ，ポアソン括弧を用いて次のように定義される，

$$\hat{L}=-i\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)=-i\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \quad (6.2)$$

リュービル演算子 $\hat{L}$ は線型であり，かつ，エルミート的である．そして，この演算子は量子論的な取り扱いに適応するように容易に一般化できる．そのためには次のように，この演算子のポアソン括弧を交換子に置き換えればよい，

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}=[H,\rho]=\hat{L}\rho. \quad (6.3)$$

ただし，ρ は密度行列である．分布関数 $f(p_1, q_1; \cdots; p_N, q_N)$ は N 個の粒子の変数に依存するので，N 粒子分布関数と呼ばれる．

統計的な方法の主眼は，(6.1) 式とか (6.3) 式に含まれる系の完全な情報を利用することを放棄して，その情報の一部を犠牲にしてでも，これらの方程式の簡単化をはかるところにある．通常，この手続きは記述の縮約といわれる．これには，必然的に，系の完全な情報をもつ分布関数から我々に必要な情報のみをもつ分布関数への書き換え（粗視化）という操作が含まれる．記述の縮約方法には2通りの方法が考えられる．その第1は，各々の粒子の変数の数を減らすことにもとづく．たとえば，分布関数 $f(p_1, q_1; \cdots; p_N, q_N)$ に代って，

$$F(p_1, p_2, \cdots, p_N)=\langle\!\langle f(p_1, q_1; \cdots; p_N, q_N)\rangle\!\rangle, \quad (6.4)$$

という分布関数で系を記述する方法である．この (6.4) 式において，$\langle\!\langle\cdots\rangle\!\rangle$ は1つの形式的な粗視化の演算子である．新しい分布関数は，この段階ではまだ，N 粒子に依存する関数である．この F に対する運動論的方程式は（あとの議論でわかるように）F について線型であり，マスター方程式と呼ばれる．この線型性は，元の方程式 (6.1) の線型性と粗視化の演算子 (6.4) の線型性に由来する．系の記述を縮約するもう1つの方法は，n 粒子分布関数 ($n\leq N$) を m 粒子分布関数 ($m<n$ とする) で表わすことにもとづいている．この場合，ある種の情報が必ず失われる．何故ならば，たとえば，ある有限時間，もとの系で n 個の粒子が特定のかたまりを構成するという相関が存在していたとしても，m 粒子の分布関数 ($m<n$) では，一般に，その相関を記述できないからである．このような粗視化の例は，ボルツマンによって用いられた方法で，次のように，2粒子分布関数を2個の1粒子分布関数で表現する場合である，

$$f(p_1, q_1; p_2, q_2)=F(p_1, q_1)F(p_2, q_2). \quad (6.5)$$

この場合の粗視化演算子は，“相関の無視”に相等し，F について非線型である．この粗視化演算子を用いると，F の方程式は次の形になる（これは，一般に，ボルツマン型といわれる），

$$\frac{\partial F}{\partial t}=St\{F,F\}, \tag{6.6}$$

上式で，右辺は衝突項と呼ばれる，また，衝突演算子 St は一般に F の非線型な汎関数である（注釈 1 を参照).

通常，運動論的方程式の導出過程には特定のある先験的仮定が含まれる．また，長い間の経験から，方程式の構造があらかじめわかっている場合も多い（たとえば，平衡状態のもの，拡散型，ボルツマン型とかである)．一般に，この構造は，その運動論的方程式で記述しようとする物理的過程の確率論的性質に大きく依存する．したがって，ある意味では，問題が“答から類推して”定式化されると言ってよい．リュービル方程式から出発して，ある項を省略することにより，乱雑運動とは本質的に異なる運動を記述する運動論的方程式に到達してしまうことさえある．それ故，運動論的方程式を導くためには，“余計な”項を取り除くための原則または先験的仮定を適切に規定する必要がある．実際的には，その本質的内容は，考えている系に乱雑性または混沌性という要素を導入することである.

ボルツマン型とマスター型の両方の運動論的方程式を導出するための基礎づけはボゴリューボフ（N.N. Bogolyubov）によって確立された [101～104]．ボゴリューボフは運動論的方程式を定式化するための非常に有効な方法を開発し，さらに，その方法の前提条件を明確に定式化することに成功した．これらの条件のなかには，マスター型方程式を導く際に摂動スペクトルに課せられる条件 [101, 102] あるいはボルツマン型方程式を導くための相関消滅の原理などが含まれる [103]（注釈 2 を参照).

マスター方程式の導出のための条件は，過去には様々なことが考えられたが，現在では乱雑位相近似 (RPA) と呼ばれる近似法にもとづくと考えられる．この近似法については次節で詳しく議論する（注釈 3 を参照).

いろいろな方法のなかで最もよく使われているものは，ボゴリューボフによる分布関数の階層的連鎖方程式の方法である．これは，リュービル方程式から出発して最終的にはボルツマン型の方程式を導く方法であり，ボゴリューボフ - ボルン - グリーン - カークウッド - イボン法（略してBBGKY法）と呼ばれる．簡単に言えば，この方法の前提となる相関消滅の原理というのは，粒子間相互の距離が十分に大きくなると，粒子相互の間には相関がなくなることを意味する．以下の議論ではこの方法を使うことはないが，ここでこれに関連したことにふれておくことは有益であろう.

ある系の粒子の運動が位相空間上で混合性をもつことが何らかの方法で明かであれば，相関の消滅は運動方程式から直接導かれる筈である．このことを以下で例を用いて示そう．いま，半径Rの質量の大きい円板状の物体が散乱の中心として格子状に配置された平面があり，その平面上を小さな粒子が運動するとしよう（図 6.1）．このように負の曲率をもった境界によって小物体が散乱する場合，小物体の運動が混合性の運動になることが知られている（シナイのビリヤード）．この事実をもとに，この散乱物体の運動の特性を定性的に記述してみよう．

議論を簡単にするため，散乱中心の格子点の周期lはRに較べて十分に大きい（$l \gg R$）としよう．小物体が出発点からある方向に運動するとき，小物体が1回目の散乱を受けるまでに小物体が移動する距離は方向によって異なるが，その距離を方向について平均したもの（平均自由行程）は，簡単な計算によって，

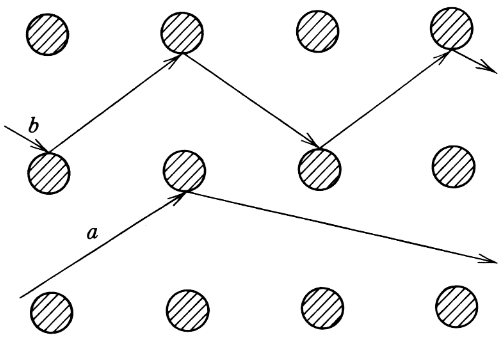


図 6.1　固定された散乱領域での2つの型のビリヤードの軌道

$$r_0 \approx l\frac{l}{R} \approx \frac{l^2}{R}$$

で与えられる．この関係を使うと，衝突と衝突との間の時間間隔t_0が，

$$t_0 = \frac{r_0}{v} = \frac{l^2}{Rv} \tag{6.7}$$

と評価できる．ただし，vは小物体の速さである．いろいろな散乱のうち，最も頻繁に起る散乱は角度の変化が小さい（$\sim R/l$）散乱である．したがって，ある規準の軸に対して角度θをもつ軌道の角度θについての引き伸しパラメーターの代表値は，

$$K \approx 1 + \frac{R}{l} \tag{6.8}$$

と書ける（図6.1の軌道aを参照）．この（6.8）式は次のことを意味する．いま，初期条件のわずかに異なる2つの軌道があって，1回目の散乱の後，これらの軌道の角度の差が$\Delta\theta_0$であるとする．2回目の散乱の後では，これらの軌道の角度の差が，

$$\Delta\theta_1 \approx K\Delta\theta_0 \tag{6.9}$$

で与えられる．3 回目の散乱以降も同様である．

こうして，n 回の散乱の後には，2 つの軌道の角度の差は，

$$\Delta\theta_n \approx K^n\Delta\theta_0 \approx \Delta\theta_0 e^{n\log K}$$

となる．$n=t/t_0$ であることと上記の関係式から，不安定性の成長率は，

$$\frac{1}{\tau_c} \approx \frac{1}{t_0}\log K$$

で表わされることがわかる．さらに，(6.7) 式と (6.8) 式を考慮すれば，関係式

$$\tau_c \approx \frac{l^2}{Rv}\Big/\frac{R}{l} = \frac{l}{v}\,\frac{l^2}{R^2} \tag{6.10}$$

が得られる．この時間τ_cは，図 6.1 における a タイプの軌道の位相相関の消滅時間という意味をもっている．このタイプの軌道を正常軌道と呼ぼう．(6.7) 式と (6.10) 式から容易にわかるように，二つの衝突の間の時間と相関消滅時間との間には次の関係がある，

$$\frac{t_0}{\tau_c} = \frac{R}{l} \ll 1 \tag{6.11}$$

同様のことが粒子の位置関係についても言える．粒子がある距離以上運動すると位相相関は減衰する．その限界的な距離 r_c は，(6.10) 式により，次のように評価できる，

$$r_c = v\tau_c = \frac{l^3}{R^2} = r_0\frac{l}{R} \gg r_0. \tag{6.12}$$

このように，粒子がr_c程度の距離を運動すると正常軌道の粒子の間の相関は消滅する．この結論によれば，BBGKY 方程式を導くときに必要な相関消滅の仮定が混合性を分析することにより，原理的には不必要になる可能性がある．しかし，残念ながら，その可能性は必ずしも現実的ではない．現実はもっと複雑であって，上述のものとは異なった 2 つのタイプの運動をする粒子群が存在する．その第 1 は，強く散乱する粒子群である．この粒子群の割合は小さく R^2/l^2 の程度であるが，その相関消滅時間は非常に短かく t_0 の程度である．その第 2 は，近似的に周期的な散乱を繰り返す粒子群である（図6.1の軌道 b を参照）．この粒子群は格子に“捕捉”されていると考えられる．また，この捕捉された軌道は，長時間経過しても，混合性を示さない．捕捉される粒子の割合も小さく R/l の程度であるが，この粒子の運動論的記述は正常粒子のものとは完全に異質のものになる．

一方，マスター方程式を導くときの状況ははるかに単純である．この場合には，運動論的方程式を導く過程に直接力学系の混合性を取り入れることができるからである．そしてこのとき，運動論的記述ができるための条件を明確に定めることが可能であるし，また，RPA などの先験的仮定にたよらずに任意の初期条件から出発する記述が可能になる．実際，文献 [85]，[105] および [13] では，このような方針に沿って運動論的方程式が導かれている．次節でその概要を述べよう．

6. 2　非線型振動子の運動論

リュービル方程式に対する摂動論．初期条件の記憶．RPA の数学的表現．分布関数の粗視化法．混合性の効果．時間スケール．

位相空間の混合性の軌道の領域，すなわち，ストカスティックな運動の領域における運動論的記述がどのようになるかを考察するには，簡単な系の例から始める方が得策である（注釈4を参照）．その例として，時間に依存する外力が摂動として作用する非線型振動子をとろう．系のハミルトニアンは，作用－角変数で表わして，

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\ \theta,\ t), \tag{6.13}$$

と書けるとする．このとき，運動方程式は，

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\theta},\quad \dot{\theta}=\omega(I)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial I} \tag{6.14}$$

となる．リュービル演算子の定義式（6.2）に従って，これを次のように置く，

$$\begin{gathered}\hat{L}=\hat{L}_0+\varepsilon\hat{L}_1,\\ \hat{L}_0\equiv-i\omega\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \hat{L}_1=-i\left(\frac{\partial V}{\partial I}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial I}\right).\end{gathered} \tag{6.15}$$

分布関数を $f=f(I,\theta,t)$ で定義すると，これはリュービル方程式，

$$i\frac{\partial f}{\partial t}=(\hat{L}+\varepsilon\hat{L}_1)f \tag{6.16}$$

を満たす．f が位相（角変数）の周期関数であることを考慮して，f をフーリエ展開すると，f は，

$$f(I,\ \theta,\ t)=\frac{1}{2\pi}\sum_n\bar{f}_n(I,t)e^{in\theta}$$

$$\bar{f}_{-n}=\bar{f}_n^*$$

と表わせる．さらに上式の $\bar{f}_n$ を次のように書いておく，その理由は直ぐ後に明らかになるだろう，

$$\bar{f}_n(I,\ t)=f_n(I,\ t)\exp\left(-in\int^t\omega(t')dt'\right)$$

ただし，$\omega(t)$ は，

$$\omega(t)\equiv\omega(I(t))$$

である．こうすると，先のフーリエ展開式は

$$f(\theta,I,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_n f_n(I,t)\exp\left[in\left(\theta-\int^t\omega(t')\,dt'\right)\right], \qquad (6.17)$$

となる．この (6.17) 式を (6.16) 式に代入し，両辺に $\exp(-in\theta)$ をかけた後，θ について積分すると，

$$i\frac{\partial f_n}{\partial t}=\varepsilon\sum_m\exp\left(in\int^t\omega(t')dt'\right)\langle n|\hat{L}_1|m\rangle$$

$$\times\exp\left(-im\int^t\omega(t')dt'\right)f_m(I,t), \qquad (6.18)$$

を得る．ここで，$\langle n|\hat{L}_1|m\rangle$ は，次式で定義される摂動の行列要素である，

$$\langle n|\hat{L}_1|m\rangle=\frac{1}{2\pi}\int d\theta\, e^{-in\theta}\,\hat{L}_1 e^{im\theta}. \qquad (6.19)$$

(6.18) 式を t について形式的に積分すれば，次式が得られる，

$$f_n(I,t)=f_n(I,0)-i\varepsilon\sum_m\int_0^t dt_1\exp\left[i(n-m)\int_0^{t_1}w(t')\,dt'\right]$$

$$\times\langle n|\hat{L}_1|m\rangle f_m(I,t_1).$$

さらに，この方程式を逐次近似法で解いて，ε^2 の項までとると，結果は次のように表わせる，

$$f_n(I,t)=f_n(I,0)-i\varepsilon\sum_m\int_0^t dt_1\exp\left[i(n-m)\int_0^{t_1}\omega(t')dt'\right]\langle n|\hat{L}_1(t_1)|m\rangle f_m(I,0)$$

$$+(-i\varepsilon)^2\sum_m\sum_k\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\exp\left[i(n-m)\int_0^{t_1}\omega(t')dt'\right]\langle n|\hat{L}_1(t_1)|m\rangle$$

$$\times\exp\left[i(m-k)\int_0^{t_2}\omega(t'')\,dt''\right]\langle m|\hat{L}_1(t_2)|k\rangle f_k(I,0). \qquad (6.20)$$

フーリエ展開式 (6.17) の第 0 成分 $f_0(I,t)$ の挙動を分析するため，(6.20) 式

で n を0に置けば，次式が得られる，

$$f_0(I,\ t)=f_0(I,\ 0)$$
$$-i\varepsilon\sum_m\int_0^t dt_1\exp\left(-im\int_0^{t_1}\omega(t')dt'\right)\langle 0|\hat{L}_1(t_1)|m\rangle f_m(I,0)$$
$$+(-i\varepsilon)^2\sum_m\sum_k\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\exp\left(-im\int_0^{t_1}\omega(t')dt'\right)$$
$$\times\exp\left(i(m-k)\int_0^{t_2}\omega(t')dt'\right)\langle 0|\hat{L}_1(t_1)|m\rangle\langle m|\hat{L}_1(t_2)|k\rangle f_k(I,0). \quad (6.21)$$

定式化がここまで進行すると，運動論的方程式の導出過程のやま場に達したことになる．つまり，(6.21) 式を用いて，運動論的方程式の導出にとって最も重要な議論を行なえる段階に達した．$f_0(I,t)$ が分布関数 $f(I,\theta,t)$ の位相 θ に依存しない成分であることは，展開式 (6.17) から明らかである．0でないある k に対して，初期条件が

$$f_k(I,0)\neq 0,\ \ (k\neq 0),$$

であると，方程式 (6.21) は $f_0(I,t)$ について閉じた形にならない．この場合，解 $f_0(I,t)$（仮に，これが解けたとして）が，$f_k(I,0)$ に依存するので，$f_0(I,t)$ は初期条件の記憶を持ち続ける，と言ってよい．

さて，$t=0$ における初期条件が，

$$f_k(I,0)=f_0(I,0)\delta_{k,0}, \quad (6.22)$$

で与えられると仮定しよう．ただし，$\delta_{k,0}$ はクロネッカーのデルタである．この初期条件のもとでは，(6.21) 式は次のようになる，

$$f_0(I,\ t)=f_0(I,\ 0)-\varepsilon^2\sum_m\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\exp\left(im\int_{t_1}^{t_2}\omega(t')dt'\right)$$
$$\times\langle 0|\hat{L}_1(t_1)|m\rangle\langle m|\hat{L}_1(t_2)|0\rangle f_0(I,0). \quad (6.23)$$

さらに，$\hat{L}_1(t)$ が，周期 $T=2\pi/\Omega$ をもつ t の関数であり，次式で表わされるとしよう，

$$\hat{L}_1(t)=\sum_p L_{1,p}\,e^{ip\Omega t},\ \ L_{1,-p}=L^*_{1,p}. \quad (6.24)$$

(6.23) 式に (6.24) 式を代入すると，(6.23) 式は次の式に書き換えられる，

$$f_0(I,t)=f_0(I,0)-\varepsilon^2\sum_m\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\exp\left(im\int_{t_1}^{t_2}\omega(t')dt'\right)$$
$$\times\Big[\sum_p\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle e^{ip\Omega(t_2-t_1)}$$

$$+\sum_{\substack{p,q \\ p+q\neq 0}} \langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,q}|0\rangle e^{i(pt_1+qt_2)\Omega}\Big] f_0(I,0). \tag{6.25}$$

上式の中括弧の中は，p についての総和の項と p, q についての二重の総和の項との和になっている．$t\to\infty$ のとき，これら 2 つの項は $f_0(I, t)$ へ，それぞれ，異なった寄与をする．これらの寄与を調べるために，次の表式，

$$\phi(t_2, t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\omega(t')dt' \tag{6.26}$$

を考える．$\omega(t)$ の第 1 近似として $\omega(I)$ を用いると，表式 (6.26) は次式で表わせる，

$$\phi(t_2, t_1)\approx\omega(I)(t_2-t_1). \tag{6.27}$$

運動方程式 (6.14) と $\omega(t)$ の定義式を利用して，この表式 (6.27) に対する補正項を評価すれば，不等式，

$$\alpha=\frac{I}{\omega}\left|\frac{d\omega}{dI}\right|\ll 1,\ \ \varepsilon\ll 1 \tag{6.28}$$

が成り立つ場合には，その補正項が時間的な要素を含めて $\alpha\varepsilon$ のオーダーの値であることがわかる．したがって，$\alpha\ll\varepsilon$ のときは，この補正項を無視してよい．(6.28) 式の条件が成りたたないようなもっと複雑な場合については後で考察する．表式 (6.27) を使うと，(6.25) 式は次のようになる．

$$f_0(I,t)=f_0(I,0)-\varepsilon^2\sum_m\sum_p\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}d\tau\, e^{-i(m\omega-p\Omega)\tau}$$

$$\times\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle f_0(I,0)-\varepsilon^2\sum_{\substack{p,q \\ p+q\neq 0}}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\times\exp[im\omega(t_2-t_1)$$

$$+(pt_1+qt_2)\Omega]\,\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\,\langle m|L_{1,q}|0\rangle\, f_0(I,0). \tag{6.29}$$

ここで，ε^2 に比例する最初の項の (t_2-t_1) は新しい変数 τ で置き換えてある．(6.29) 式の ε^2 に比例する 2 つの項を比較してみよう．少し解析すればわかるように，$t\to\infty$ のとき，第 1 の項は $\varepsilon^2 t$ に比例するのに対し，第 2 の項は，($p\neq -q$ であるから) 時間的に常に振動しおり，大きさとしては $\varepsilon^2\times 1$ のオーダーの量になる．それ故，第 2 の項は第 1 の項に比べて無視できる．(6.29) 式の最後の項を無視して，その両辺を t で微分すれば，次の方程式が得られる，

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=-\varepsilon^2\sum_m\sum_p\int^{\infty}d\tau\, e^{-i(m\omega-p\Omega)\tau}\,\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\,\langle m|L_{1,-p}|0\rangle\, f_0. \tag{6.30}$$

ここで，$f_0(I, t)$ を簡略化して f_0 と書いた，さらに，右辺の $f_0(I, 0)$ を $f_0(I, t)$

$\equiv f_0$ に書き換えてあるが，このための誤差は ε^4 のオーダーの量である．

(6.30) 式をもっと簡単な形に書き直すために次の公式を利用する，

$$\int_0^\infty d\tau e^{-i\nu\tau}=\pi\delta_-(\nu)=\pi\delta(\nu)-i\mathscr{P}\frac{1}{\nu},$$

ただし，$\mathscr{P}$ は，これが付いた量の主値を取るという記号である．定義式 (6.19) と (6.24) 式から明らかなように，

$$\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle$$

は m と p のそれぞれの偶関数である．したがって，

$$\sum_m\sum_p\mathscr{P}\frac{1}{m\omega-p\Omega}\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle=0,$$

となるから，結局，(6.30) 式は次のようになる，

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=-\pi\varepsilon^2\sum_m\sum_p\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle\times\delta(m\omega-p\Omega)f_0. \quad (6.31)$$

これが非線型振動子に対するマスター方程式である（注釈5を参照）．(6.31) 式のデルタ関数は，(6.31) 式には振動子と外力との共鳴相互作用だけが取り入れられていることを示している．

上述のマスター方程式の導出過程において，不等式 (6.28) は，計算を容易にする手段にはなったが，本質的な役割をはたすものではない．そこで本質的に重要な役割をはたしたのは初期条件〔(6.22) 式〕であった．これは以前に述べた乱雑位相近似の表現そのものである．このことは，時刻 $t=0$ における展開式 (6.17) を調べれば理解できる．事実，$t=0$ で位相が乱雑であれば，(6.17) 式の両辺に $\exp(ik\theta)$（k は任意の整数）をかけて，θ について平均をとることにより，条件 (6.22) 式が導かれる．

マスター方程式 (6.31) をもっと具体的に分析してみよう．摂動の具体的な例として，4.1節で取り扱った周期的 δ 関数の時間依存性をもつものをとる．4.1節の場合と同様に，

$$V(I,\theta)=V_0(I,\theta)\ T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$T\equiv\frac{2\pi}{\Omega} \quad (6.32)$$

と置く．$V_0(I,\theta)$ を，

$$V_0(I,\theta)=\sum_n V_n(I)e^{in\theta},\ \ V_{-n}=V_n^* \quad (6.33)$$

の形に展開して，定義式 (6.15)，(6.19)，(6.24)，(6.32) を用いると，次の表

式が得られる，

$$\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle=-m^2\left(\frac{\partial V_m}{\partial I}+V_m\frac{\partial}{\partial I}\right)V_{-m}\frac{\partial}{\partial I}$$

$$=-m^2\frac{\partial}{\partial I}|V_m|^2\frac{\partial}{\partial I}.$$

この表式を（6.31）式に代入すれば，（6.31）式は次の方式程に書き換えられる，

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}D(I)\frac{\partial f_0}{\partial I}. \tag{6.34}$$

ただし，$D(I)$ は，

$$D(I)=\pi\varepsilon^2\sum_m\sum_p m^2|V_m|^2\delta(m\omega-p\Omega), \tag{6.35}$$

で与えられ，拡散係数と呼ばれる．上記の（6.34）式が，いわゆる，フォッカー－プランク型の拡散方程式である．振動数 Ω が非常に小さい（$\Omega\ll\omega$）場合を考えると，p についての総和は次のように積分に置き換えられる，

$$\sum_p\delta(m\omega-p\Omega)\rightarrow\frac{1}{\Omega}\int d(p\Omega)\,\delta\,(m\omega-p\Omega).$$

この置き換えによって，（6.35）式は，

$$D(I)=\pi\varepsilon^2\sum_m m^2|V_m|\frac{1}{\Omega}, \tag{6.36}$$

となる．これは，拡散係数 $D(I)$ が摂動エネルギーのスペクトル密度 $|V_m|^2/\Omega$ に比例することを示している．

ところで，3.1節のフォッカープランク型方程式の簡略的な導出法による表式と（6.36）式が一致することは注目に値する．実際に3.1節の議論をいまの場合に適用すると，まず，拡散係数 $D(I)$ は，

$$D(I)=(\overline{\varDelta I})^2/T, \tag{6.37}$$

と表わせる．ここで，$\varDelta I$ は時間 T の間の I の変化量であり，$(\overline{\varDelta I})^2$ は $(\varDelta I)^2$ の位相についての平均値である．一方，運動方程式（6.14）と摂動の表式（6.32）から，次式が得られる，

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\varepsilon\frac{\partial V_0(I,\theta)}{\partial\theta}T\sum_k\delta(t-kT).$$

この両辺を t について時間 T にわたって積分すれば，$\varDelta I$ に対する表式が次のように求まる，

$$\varDelta I=-\varepsilon\frac{\partial V_0(I,\theta)}{\partial\theta}T.$$

これを（6.37）式に代入して，位相（θ）について平均すると，容易に表式（6.

36）が導かれる．ここでの議論では，条件（6.22）の代りに，外力のパルスごとに位相（θ）についての平均をとるというやや厳密性を欠く操作が利用されていることに注意する．

つぎに，混合性を有する振動子の場合には，先験的な RPA 型の仮定を置かなくても運動論的方程式を導くことが可能であることを示そう．対象としては（6.14）式と同じ系をとり，（6.32）式の形の摂動が作用しているとしよう．第4.1節の分析方法を採用する．

4.1節の（4.14）式によれば，

$$K=\varepsilon\alpha\omega T\gg 1 \tag{6.38}$$

が成り立つときは，振動子の運動がストカスティックになった．また，そのとき振動子の位相の相関関数〔(4.15）式〕は次式のように指数関数的に減衰した

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(m,\ t|n,0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta(0)\exp\{i[m\theta(t)-n\theta(0)]\}\\&\approx e^{-\frac{t}{\tau_c}}\,e^{im\omega t}.\end{aligned} \tag{6.39}$$

ただし，相関消滅時間 τ_c は，

$$\tau_c=\frac{2T}{\log K}. \tag{6.40}$$

で与えられる．一方，（6.21）式に戻って，これに展開式（6.24）を代入すると次の関係式が得られる，

$$\begin{aligned}f_0(I,t)=&f_0(I,0)-i\varepsilon\sum_m\int_0^t dt_1\exp\left(-im\int_0^{t_1}\omega(t')dt'\right)\\&\times\langle 0|L_1(t_1)|m\rangle f_m(I,0)-\varepsilon^2\sum_m\sum_p\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\\&\times\exp\left(-im\int_{t_1}^{t_2}\omega(t')dt'\right)e^{ip\Omega(t_1-t_2)}\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle\\&\times f_0(I,0)-\varepsilon^2\Sigma'.\end{aligned} \tag{6.41}$$

ただし，$\varepsilon^2\Sigma'$ は ε^2 のオーダーの残りの項を意味する．前述したように，$t\to\infty$ のときの $f_0(I,t)$ の漸近的振舞を調べるには，t の次数の最も大きい項を選び出す必要がある，すなわち，外力と振動子の共鳴相互作用項だけを取り入れる必要がある．前述と同様の解析を行なえば，（6.41）式にはそのような項が具体的に書かれており，時間的に急激に振動する非共鳴項は $\varepsilon^2\Sigma'$ に含めてあることがわかる．したがって，$t\to\infty$ のときには，$\varepsilon\Sigma'$ の項を無視して差し支えない．以前

にRPA近似で求められた表式と（6.41）式との違いは ε の1次の項の有無だけである．この項が有るということは，まだ初期条件の記憶が残っていることを意味する．

さて，位相についての粗視化を表わす演算を次式によって導入する，

$$\langle\!\langle \cdots \rangle\!\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta(0)\cdots. \tag{6.42}$$

ただし，右辺の積分は初期位相について行うものとする．また，粗視化した分布関数を次の記号で表わそう，

$$F(I,t)=\langle\!\langle f_0(I,t)\rangle\!\rangle. \tag{6.43}$$

表式（6.41）に演算（6.42）を作用し，$\varepsilon^2\sum'$ の項を無視すると，（6.41）式は次式に書き換えられる，

$$\begin{aligned}F(I,t)&=f_0(I,0)-i\varepsilon\sum_m\int_0^t dt_1\langle\!\langle e^{-im\phi(t_1,0)}\rangle\!\rangle\\&\quad\times\langle 0|L_1(t_1)|m\rangle f_m(I,0)-\varepsilon^2\sum_m\sum_p\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\\&\quad\times\langle\!\langle e^{-im\phi(t_1,t_2)}\rangle\!\rangle e^{ip\Omega(t_2-t_1)}\langle 0|L_{1,p}|m\rangle\langle m|L_{1,-p}|0\rangle\\&\quad\times f_0(I,0).\end{aligned} \tag{6.44}$$

ただし，上式では ϕ（…）の定義式（6.26）が用いられている．4.1節で運動方程式を分析した際，混合性がある場合には，位相に対する記述は近似的方程式による記述で充分であること，つまり，$\dot{\theta}$ などは次式による記式で充分であることをみた，

$$\dot{\theta}\approx\omega(I).$$

この式と（6.26）式によって，$\phi(t_1,t_2)$ は

$$\phi(t_1,t_2)=\theta(t_1)-\theta(t_2)$$

と書ける．この等式に注意すれば，（6.44）式の粗視化を表わす括弧 $\langle\!\langle\cdots\rangle\!\rangle$ の部分が（6.39）式の対応する相関関数に一致することがわかる．つまり，上記の等式と（6.39）式を用いると，次の関係式が得られる，

$$\langle\!\langle e^{-im\phi(t,0)}\rangle\!\rangle=\langle\!\langle e^{-im[\theta(t)-\theta(0)]}\rangle\!\rangle\approx e^{-t/\tau_c}e^{-im\omega t} \tag{6.45}$$

同様にして，次の関係式も得られる，

$$\langle\!\langle e^{im\phi(t_1,t_2)}\rangle\!\rangle=\langle\!\langle e^{-im[\theta(t_1)-\theta(t_2)]}\rangle\!\rangle\approx e^{-(t_1-t_2)/\tau_c}e^{-im\omega(t_1-t_2)}. \tag{6.46}$$

（6.45）式と（6.46）式を（6.44）式に代入した後，その両辺を t について微分すると，次の方程式が導かれる，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\varepsilon\, e^{-t/\tau_c} e^{-im\omega t} \langle 0|L_1(t)|m\rangle f_m(I,0)$$

$$-\varepsilon^2 \sum_m \sum_p \int_0^t d\tau \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_c} - i(m\omega - p\Omega)\tau\right]$$

$$\times \langle 0|L_{1,p}|m\rangle \langle m|L_{1,-p}|0\rangle F. \tag{6.47}$$

ただし，上式において，以前と同様 ε^2 の項の $f_0(I, 0)$ を F に置き換えてあるが，このための誤差は ε^2 よりも高次のオーダーの量である．(6.47) 式を見ると，まず，$t > \tau_c$ では，右辺の初めの項は時間とともに指数関数的に減少し，初期条件の記憶が消滅することがわかる．さらに，第2項において，共鳴の条件が，

$$m\omega - p\Omega = 0,$$

であることに留意すると，m と p の総和は m と p とが同じ符号をもつ項についてだけ実行すればよいことがわかる．このことと，m または p の符号を逆転した時の $\hat{L}_1$ の行列要素の対称性を考慮する．そして，$t \to \infty$ の極限を考えると，(6.47) 式から，結局，次の表式が得られる，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2\varepsilon^2 \sum_{m>0} \sum_{p>0} \frac{1/\tau_c}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2}$$

$$\times \langle 0|L_{1,p}|m\rangle \langle m|L_{1,-p}|0\rangle F. \tag{6.48}$$

さらに，もしも，

$$\frac{1}{\tau_c \Omega} \to 0 \tag{6.49}$$

であるならば，

$$\Delta(1/\tau_c,\ m\omega - p\Omega) \equiv \frac{1/\tau_c \pi}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2}$$

$$\to \delta(m\omega - p\Omega) \tag{6.50}$$

の置き換えが許される．この置き換えを (6.48) 式に適用すれば，(6.48) 式は (6.31) 式または (6.34) 式の形のマスター型運動論的方程式に移行する．さらに，摂動の行列要素の具体的表式を用いて，(6.48) 式を書けば，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_m \sum_p m^2 |V_m|^2 \Delta(1/\tau_c,\ m\omega - p\Omega) \frac{\partial F}{\partial I}$$

$$= \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial F}{\partial I}, \tag{6.51}$$

となる．ただし，$D(I)$ は

$$D(I) = \pi\varepsilon^2 \sum_m \sum_p m^2 |V_m|^2 \Delta(1/\tau_c,\ m\omega - p\Omega), \tag{6.52}$$

で与えられる．(6.35) 式と (6.52) 式をみると，(6.52) 式では δ 関数が Δ 関数に置き換えられているが，これは，初期条件の記憶が消滅するには，時間が τ_c 程度の有限時間を経過する必要があることを考慮したためである．

上述のように，系が混合性をもつという仮定を置くことによって，任意の初期条件の系に対する運動論的記述が得られ，最終的に，運動論的方程式として (6.51) 式が導かれた．この (6.51) 式を導いた方法に従えば，運動論的記述が可能な関数 F をも明確に規定することができた，すなわち，F の定義式 (6.43) は粗視化の方法を具体的に定めている．そこで，逆に混合性の条件 (6.38) 式が成りたたない場合に，(6.42) 式で表わされる粗視化の演算を実行すると結果はどうなるかをみておこう．この場合には，位相相関関数 $\mathcal{R}(m,\ t|m,\ 0)$ は，

$$\mathcal{R}(m,\ t|m,\ 0) \approx e^{im\omega t},$$

の程度の量になり，また，$\langle\!\langle e^{-im\phi(t,\,0)}\rangle\!\rangle$ は

$$\langle\!\langle e^{-im\phi(t,\,0)}\rangle\!\rangle \approx e^{-im\omega t},$$

となるであろう．それ故，(6.44) 式の ε の 1 次の項は消滅しない．したがって，混合性が無い場合には，位相についての粗視化演算は本質的な役割をはたさないと考えられる（注釈 6 を参照)．

最後に，系の運動論的記述を規定する種々の特性時間の大小関係を評価してみよう．まず，振動子に作用する摂動は δ 関数形のパルスである．したがって，“衝突” 時間 τ_s は 0 と考えられる．衝突とつぎの衝突の間の時間は T である．この時間は自由行程時間 τ_0 を意味する．初期条件が消滅するまでの時間，すなわち，相関消滅時間 τ_c は，$K\gg 1$ の場合，(6.40) 式により，不等式，

$$\tau_c \ll T = \tau_0.$$

を満たす．さらに，(6.51) 式または (6.52) 式〔あるいは (6.36) 式〕から拡散時間 τ_D を求めると，次の関係式が得られる，

$$\tau_D = \frac{\Omega}{\pi\varepsilon^2}\frac{T^2}{V^2} \approx \frac{T}{\varepsilon^2} \gg T. \tag{6.53}$$

結局，これらの特性時間の大小関係をまとめると，

$$\tau_s \ll \tau_c \ll \tau_0 \ll \tau_D, \tag{6.54}$$

という不等式が成り立つ．運動論的方程式を導く段階で $t\to\infty$ の極限を考えたが，いまや，それは，$t\gg\tau_0=T$ を満たす時間 t を意味すると考えてよい．

我々は後でもっと複雑な系のマスター方程式を導かなければならないが，上述の主要な関係式はその場合にも成り立つ．特に，種々の特性時間の大小関係 (6.

54) 式はそのままの形で成り立つであろう.

6.3　波束の場の中での粒子の拡散運動

変数の選択，分布関数に対する方程式，波束近似．準線型方程式，粒子の“捕捉”時間に関する注意.

プラズマ理論の多くの問題では，波束の場の中で運動する荷電粒子が取り扱われる．ここでもそのような問題を考察しよう．運動方程式は (5.42) 式の形，すなわち，

$$\ddot{x}=\frac{e}{m}\sum_k E_k\cos(kx-\omega_k t), \tag{6.55}$$

で与えられるとする．この式の右辺で，ω_k の k 依存性は，波束を構成する波の分散性を表わす．我々はすでに5.3節で粒子の運動がストカスティックになるための条件を知っている．(5.45) 式により，この条件は，

$$K=\frac{\frac{e}{m}kE_k}{\Omega_k^2}\gtrsim 1, \tag{6.56}$$

と書ける．ここで，Ω_k は，

$$\Omega_k=\Delta k\left(v-\frac{d\omega_k}{dk}\right), \tag{6.57}$$

であり，また，Δk は波束スペクトルの隣接した2つの波数の差の代表的な値である．これに対応して，Ω_k はこのときの2つの波の振動数の差の代表的な値という意味をもつ（94頁の最上段の式を参照せよ)．後の便宜のため，次の記号を導入しよう，

$$\frac{1}{\tau_k}=\left(\frac{e}{m}kE_k\right)^{1/2}. \tag{6.58}$$

(6.55) 式によれば，この τ_k は，k 番目の平面波の中で粒子が微小振幅振動をするときの振動数である．定義式 (6.58) を利用すると，条件式 (6.56) は次のようにかなり簡単になる，

$$K=\frac{1}{\tau_k^2\Omega_k^2}\gtrsim 1. \tag{6.59}$$

また，(5.45) 式から，上式の中間項は，共鳴の重複を表わすパラメーターの2乗であることがわかる.

系が条件式 (6.59) を満たすとして，系の運動論的記述を求めよう．はじめに，方程式 (6.55) を次の方程式系に書き換える，

$$\dot{v}=\frac{1}{2}\sum_k (V_k e^{i\theta_k}+V_{-k}e^{-i\theta_k}),\quad V_{-k}=V_k^*,\quad \dot{\theta}_k=kv-\omega_k\equiv\omega_k(v). \tag{6.60}$$

ただし，v，θ_k，および V_k は次式で定義される，

$$v=\dot{x},\quad \theta_k=kx-\omega_k t,\quad V_k=\frac{e}{m}E_k. \tag{6.61}$$

次に，波束スペクトルに含まれる調和振動の総数が N であるとして，分布関数，

$$f(v,\theta,t)\equiv f(v,\theta_{k1},\theta_{k2},\cdots,\theta_{kN},t),$$

を導入する．$f(v,\theta,t)$ に対するリュービル方程式は，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k \omega_k\frac{\partial f}{\partial\theta_k}+\frac{1}{2}\sum_k (V_k e^{i\theta_k}+V_{-k}e^{-i\theta_k})\frac{\partial f}{\partial v}=0, \tag{6.62}$$

となる．前節の手続と同様に，$f(v,\theta,t)$ を ($\theta_{k1},\theta_{k2},\cdots,\theta_{kN}$) についてフーリエ展開すると，次の表式が得られる，

$$f(v,\theta,t)=\sum_{(n)}[f^{(n)}(v,t)e^{i(n,\theta)}+f^{(-n)}(v,t)e^{-i(n,\theta)}]. \tag{6.63}$$

ただし，

$$f^{(-n)}=(f^{(n)})^*,\quad (n,\theta)\equiv n_1\theta_{k1}+n_2\theta_{k2}+\cdots+n_2\theta_{k2}+\cdots+n_N\theta_{kN},$$

であり，また，記号 (n) は N 個の整数の 1 組 ($n_1,n_2,\cdots,n_N$) を意味する．こうすると，乱雑位相近似は次の式で表わされる，

$$f^{(n)}(v,\theta,t=0)=0,\quad (n\neq 0). \tag{6.64}$$

条件 (6.64) は，初期時刻において分布関数が位相に依存しないこと，したがって，位置座標 x に依存しないことを意味する．

さて，いよいよ，条件式 (6.59) が全ての k について成りたつことを前提とすれば，任意の初期条件の場合に，粒子の運動を記述する運動論的方程式を導くことができることを示そう．まず，(6.60) 式に現われる変数 v が作用変数の役割を演じていることに注意し，前節の議論にならって，分布関数の粗視化演算子，

$$\begin{aligned}F(v,t)&=\langle\!\langle f^{(0)}(v,t)\rangle\!\rangle\\&=\int_0^{2\pi}d\theta_{k1}\int_0^{2\pi}d\theta_{k2}\cdots\int_0^{2\pi}d\theta_{kN}f^{(0)}(v,t),\end{aligned} \tag{6.65}$$

を導入しよう．(6.2) 式と (6.62) 式により，リュービル演算子の摂動部分は，

$$\hat{L}_1=-\frac{i}{2}\sum_k (V_k e^{i\theta_k}+V_{-k}e^{-i\theta_k})\frac{\partial}{\partial v}, \tag{6.66}$$

となり，時間 t に陽には依存しない．このことから，(6.19) 式と類似の行列要

素も，

$$\langle m|\hat{L}_1|0\rangle=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}d\theta_{k_1}\int_0^{2\pi}d\theta_{k_2}\cdots\int_0^{2\pi}d\theta_{k_N}\,e^{-i(m,\theta)}\hat{L}_1$$

$$=-\frac{i}{2}\sum_k(V_k\delta_{m_k,1}+V_{-k}\delta_{m_k,-1})\frac{\partial}{\partial v}, \tag{6.67}$$

と書ける．(6.66) 式と (6.67) 式を (6,44) 式に代入する．その時，($\hat{L}_1$ が t に陽には依存しないから) $p=0$ と取ってよいことに注意する．その結果得られる表式を t について微分すると，次の方程式が得られる，

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\mathrm{Re}\sum_k V_k\langle\!\langle\exp\left(i\int_0^t\omega_k(v)\,dt'\right)\rangle\!\rangle\frac{\partial f^{(1)}}{\partial v}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\sum_k|V_k|^2\int_0^\infty d\tau\langle\!\langle\cos\int_0^\tau\omega_k(v)\,dt'\rangle\!\rangle\frac{\partial F}{\partial v}. \tag{6.68}$$

ここで，f の肩につけた添字 (1) は全ての n_k を1に取ることを意味する．なお，この (6.68) 式を書く際に，前節と全く同じ計算過程は極力省略して，異なった位相 θ_k が N 個出現することによって生じる相違が明確になるようにした．

つぎに，(6.68) 式の相関関数を評価しよう．その準備として，次の波束の表式を定性的に分析してみよう．

$$G(t)=\sum_k(A_k e^{i\omega_k t}+A_{-k}e^{-i\omega_k t}). \tag{6.69}$$

分析が簡単になるように，上記の k についての総和は，$k=0$ から充分に大きいある値 $k_{\max}$ までとるものとする．いま，仮りに，(6.69) 式の波束が理想的な波束であるとして，その各パラメーターが次の関係式を満たすとしよう．

$$A_k=\text{定数}=A,$$
$$\omega_{kn}=nkc=n\Omega,$$
$$k_{\max}\to\infty. \tag{6.70}$$

ただし，n は整数であり，また，c は，波の位相速度を表わす定数である．このとき，$G(t)$ は，

$$G(t)=A\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\Omega t}=AT\sum^{\infty}\delta(t-nT), \tag{6.71}$$

となることが，ポアソンの総和則を使って，容易に示される．しかし，実際の波束のパラメーターが関係式 (6.70) からずれていると，その形態も (6.71) 式とは違ったものになる．いろいろな場合を想定して，その相違を予測してみよう．第1に，(6.69) 式の波束が有限の幅をもつ場合である．この場合には，(6.71)

式の δ 関数は，幅をもったやや δ 関数と似た関数にとって代られるであろう．不確定性関係によれば，その擬似 δ 関数の幅 Δt と振動数の幅（$\omega_{\max}-\omega_{\min}$）との間には次の関係がある，

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{\max}-\omega_{\min}}.$$

ただし，$\omega_{\max}$ と $\omega_{\min}$ は，それぞれ，波数が $k_{\max}$ と $k_{\min}$ である波の振動数である．したがって，振動数の幅（$\omega_{\max}-\omega_{\min}$）が充分に大きいときには，$G(t)$ の中の擬似 δ 関数は本当の δ 関数に近いものになる．このとき，スペクトルの低周波数領域の ω_k に対して，

$$\Delta t \omega_k \ll 1, \tag{6.72}$$

が成りたつ．第2に，振動数の分散性がわずかに存在する，すなわち，$d^2\omega_k/dk^2$ が有限の小さな値になる場合である．このとき，Ω は

$$\Omega \approx \frac{d\omega_k}{dk}\Delta k, \tag{6.73}$$

と表わすことができる．ただし，Δk は，波束を構成する調和振動の隣接した波数の差の代表的な値である．この Ω が k にわずかに依存することは，δ 関数形のパルスが等周期のものからわずかにずれることを意味するにすぎない．第3に A_k が k に依存する場合である．このときもその依存性が弱ければ，δ 関数のパルスの振幅がわずかに変形するだけである．これら3つの場合を総合すると，パラメーターが関係式（6.70）からわずかにずれるだけならば，（6.73）式で与えられる Ω を用いた近似式（6.71）が，波束の表式（6.69）の良い近似表式になることがわかる．（6.69）式の代りに（6.71）式を用いると，連続的な時間で記述された運動方程式が，第4章で行なったのと同じ処法で，離散的な写像に置き換えられることに注意しよう．

さて，上述の注意と前節の議論から，（6.68）式の相関関数は，公式(6.45）を用いて評価してよいことがわかり，それを実行すると次の評価式が得られる，

$$\left\langle\!\left\langle \exp\left(i\int_0^t \omega_k(t')dt' \right) \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle e^{i[\theta_k(t)-\theta_k(0)]} \right\rangle\!\right\rangle$$

$$\approx e^{-\frac{t}{\tau_c}} e^{i\omega_k(v)t} \tag{6.74}$$

ただし，τ_c は（6.57）式の Ω_k を用いて，

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Omega_k \log K} \tag{6.75}$$

で与えられる．同様に，次の評価式も導かれる，

$$\int_0^\infty dt \langle\!\langle \cos[\theta_k(t)-\theta_k(0)] \rangle\!\rangle \approx \frac{2/\tau_c}{(1/\tau_c)^2+\omega_k^2(v)}$$

$$=\frac{2/\tau_c}{(1/\tau_c)^2+(\omega_k-kv)^2} \equiv 2\pi\Delta(1/\tau_c,\ \omega_k-kv). \qquad (6.76)$$

以前の場合と同じく，(6.74) 式は，t が大きいとき，(6.68) 式の摂動の1次の項が消えることを示している．これと (6.76) 式に注意すると，(6.68) 式は最終的に次の運動論的方程式に書き換えられる，

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\pi\frac{\partial}{\partial v}\sum_k |V_k|^2\Delta(1/\tau_c,\ \omega_k-kv)\frac{\partial F}{\partial v}. \qquad (6.77)$$

この方程式は，速度空間での粒子の拡散過程を記述している（注釈7を参照)．

以上の議論の帰結として，ストカスティックな領域の粒子運動に関して，1つの一般的結論を述べることができる．5.3節で (6.55) 式または (6.60) 式を分析した際，非線型共鳴によって粒子が個々の平面波ポテンシャルの中に捕捉される領域が位相平面上に形成される事実を述べた．ストカスティシティの条件(6.59)式はその共鳴領域が重複する条件に他ならない．一方，捕捉された粒子が井戸型の平面波ポテンシャルを横切るために要する時間は (6.58) 式の τ_k に等しい．τ_k と τ_c との比は，(6.59) 式と (6.75) 式から，

$$\frac{\tau_k}{\tau_c} \approx \tau_k\Omega_k \log\frac{1}{\tau_k\Omega_k} \ll 1 \qquad (6.78)$$

で与えられる．この式 (6.78) と条件式 (6.59) 式を組み合せると，特性時間の間の次の関係が得られる，

$$T_k \gg \tau_c \gg \tau_k,\quad T_k \equiv 2\pi/\Omega_k. \qquad (6.79)$$

非線型共鳴を基礎に考えると（1.3節を参照)，k 番目の平面波ポテンシャルによって作られたセパラトリックス細胞の中で粒子が位相振動するときの周期という意味を τ_k に与えることができる．関係式 (6.79) は，相関消滅時間 τ_c が位相振動の周期と離散的写像（δ 関数形の外力）の周期との中間の値になることを示している．この性質は，ストカスティシティをもつこれまで述べた全ての場合に成り立つ一般的関係である．

第6章に関する注釈

1.　衝突項の非線型性の具体的な形は衝突の種類に依存する，そしてそれが分布関数の時間発展を決定する．(6.6) 式の場合，2体衝突を考えているので，その右辺は $\boldsymbol{F}$ について

の2次の汎関数になる．2体衝突が無いか，あってもその寄与が小さいときは，3体衝突がfの時間発展に対して支配的になることがある．その場合の粗視化の操作は，たとえば，次のようなfの分解によって行うことができる，

$$f(p_1, q_1;\ p_2, q_2;\ p_3, q_3) = F(p_1, q_1)\, F(p_2, q_2)\, F(p_3, q_3).$$

このとき，運動論的方程式は次のような構造をもつであろう，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mathrm{St}\{F, F, F\}.$$

2. マスター方程式の導出についてのボゴリューボフの論文は［101, 102］，事実上，入手が困難な形でしか発表されなかったので，彼の全集的な文献［104］が刊行されるまで多くの物理学者はその事実を知らなかった．これは実に残念なことである．これらの文献には，先を見越したようにその後に発展させられた多くの方法や考え方が論じられている．文献［101, 102］が刊行されてから長い年月が経たが，そこでなされている分析の深さと鋭さに我々は今だに感銘せざるを得ない．

3. 乱雑位相近似を用いてマスター型方程式を導く方法は，プリゴジン（I. Prigogine）と彼の学派の人達によって完璧な形に発展させられた［7, 12］．また，これについては，射影演算子によるエレガントな方法がツバンツィッヒ（R.J. Zwanzig）によって提案されている［106］．一方，ズバレフ（D, N. Zubarev）は，非常に複雑な場合にも射影演算子の形を定めることを可能にする非平衡統計演算子の方法を示唆している［1, 107, 108］．

4. 運動論的方程式を導くための厳密で完全な方法を論じることが本節の目的ではない．したがって，以下で述べる導出の手続はかなり簡略化されている．このために生じる不備な点は，乱雑位相近似を使わなくても，軌道の混合性の導入によって運動論的方程式が自動的に導かれる可能性をかなり明快な形で示すことによって帳消しにしていただこう．

5. ここで述べるマスター方程式の導出方法は厳密ではない，しかし，この方法は，ある選択則に従ってεの無限級数から特別な項だけを取り出すという処法で改良できる．たとえば，級数から，最も支配的な項（対角項）のなかで ε^2 ずつ次数が増える項だけを選択して総和を作る処法である．この処法についてはプリゴンジの著書で詳しく論じられている［7］．

6. ここで，注意したいことは，位相についての任意の平均操作が必ずしも不可逆性をもたらすとは限らないということである．系が不可逆性を示すためには，方程式がもつ情報の部分的喪失に相当する内部構造が系に存在する必要がある．明らかに，いまの場合，その内部構造は混合性によるものである．

7. 方程式（6.77）において，$\Delta(1/\tau_c, \omega - kv)$ を $\delta(\omega - kv)$ に置き換える極限では，（6.77）式はプラズマ理論で準線型方程式として知られている方程式になる．この方程式は文献［90］で RPA 近似を用いて導かれた．また，この方程式は，多方面に応用され，とくに，プラズマの集団運動の理論の発展に大きく寄与した．これらの点については，文献［109, 110］と総合報告［111］を参照されたい．

準線型方程式を導くにあたって，文献［90］の著者達は，“捕捉”粒子が存在しないと

いう条件を用いている．この条件は共鳴が重複するための条件と本質的に同じである．事実，この条件が成りたつ場合にのみ，粒子が波動の井戸形ポテンシャルの中に τ_k よりも長い時間留まることが困難になるのである．

7章　非線型波動の場

これまでの各章では，自由度の数が比較的小さい系を取り扱ってきた．自由度の数 N が大きくなると，論理的には，系のモードが混合性をもち易くなることが期待される．しかし，$N \gg 1$ であると，運動が実際にストカスティックになり．また，安定な領域（運動が準周期的になる位相空間またはパラメーター空間の領域）が無視できるようになることを本当に期待してよいのだろうか？　この種の問題には，系がどの型の運動をとるかは，他のどんなパラメーターよりも本質的に N に強く依存するという考え方が根底にある．これは，N が大きい場合には，統計力学の諸法則が成り立つという広く受け入れられている考え方であるが，これに捉われ過ぎることは危険である．この問題をもっと具体的に考えてみよう．N がどの位の値であると大きいと言えるのか？　N が 10^{23} 程度であると，統計力学の諸法則は確かに様々な対象に対して成り立つ．一方，N が 10^2 程度であると，系の振舞は必ずしもストカスティックにならない（このことは後に実際に示されるであろう）．そこで，$N=10^{23}$ と $N=10^2$ との本質的な違いは何であろうかという疑問が生じる．

比較的自由度の大きい系の規則運動が混合性の運動(ストカスティックな運動)に移行するための条件を分析するために，現在のところ最も有効であり，また，詳しく調べられている対象は非線型の波動場である．この章では，比較的に弱い非線型性の波動場を考察する．ここで，比較的に弱い非線型性の波動場というのは，線型的な波動場がその第0近似として充分に良い近似になる波動場のことである．

7.1　フェルミ－パスタ－ウラムの問題

問題のおこりと定式化，共鳴の重複とストカスティシティのしきい値．

統計力学系が現実の系（自由度の数 N が比較的に大きく，それらの間の相互作用が強い系）に適用できるための条件については，従来，伝統的な考え方があった．その考え方を確かめることが，フェルミ（E. Fermi），パスタ（J. Pasta）

およびウラム（S. Ulam）により歴史的にはじめて試みられた［112］．これらの研究者はその試みを次の方法で実行した．まず，振動する連続体，つまり，弦を考える．この連続体を有限個の点状の振動子の集合であると近似的にみなし，そして，たとえば，m 番目の振動子の運動方程式は，

$$\ddot{u}_m=(u_{m-1}-2u_m+u_{m+1})+\beta\left[(u_{m+1}-u_m)^3-(u_m-u_{m-1})^3\right],$$
$$m=1,2,\cdots,N-1, \tag{7.1}$$

で与えられるとする．ここで，u_m は m 番目の振動子の変位である．境界条件としては，周期的条件，

$$u_N=u_0$$

をとる．上記の方程式系（7.1）は，相互作用のある N 個の非調和振動子系を記述し，近似的には，連続体として振動する弦の運動方程式，

$$u_{tt}=u_{xx}(1+3\beta u_x^2)+\gamma u_{xxxx} \tag{7.2}$$

に対応する，ここで，γ は $\gamma=a^2/12$ で与えられる．ただし，a は弦上の周期的間隔である．

いま，低モードの1個か数個の励起に相当する単純な運動が弦の上に生じていたとしよう．もしも，系の振舞が統計的であるならば，運動の熱化によって，エネルギーが1つのモードから他のモードへ移動することが考えられる．つまり，あるモードが一時的に励起されても，やがては，全てのモードが平均として等しいエネルギーの値をもつようになる（自由度の間のエネルギー等分配則）．これと同じことが，（7.1）式の振動子の弦に対しても言える．そのために要請されることは，N が十分に大きい値であるということだけである（文献［112］では N の値が64までとられた）．（7.1）式または（7.2）式においては，モード間（あるいは摂動子間）の相互作用が非線型項で記述されている．したがって，たとえ β が小さくても，N が大きい場合に，(7.1) 式を解くことは多くの困難がともなう．しかし，コンピューターの出現により，方程式系 (7.1) の数値解析が可能であることが，1950年の初頭にロスアラモスで証明された．その解析結果は文献［112］に発表されている（注釈1を参照）．この著者達は自分達が得た結果に驚いた．彼等が当初予想した振動子間の熱化の現象が起こらなかったのである．この結果でわかったことは，励起モードのエネルギーがそのモードに近い幾つかのモードに移動するだけで，スペクトル全体には伝播しないことであった．また，系の全般的な運動は準周期的になるだけで，明確にストカスティックであると考えられる挙動にはならなかった．この当初の予想と数値解析の結果との著しい相違をフ

ェルミーパスターウラム（FPU）問題と言う.

その後，文献［112］に報告された結論を確かめる研究が行なわれ［113〜115］，上述のパラドックスが再確認されている．一方，このパラドックスの解決法がはじめて，イズライレフ（F.M. Izrailev）とチルコフ（B.V. Chivikov）によって示唆された［116］．彼等の考え方は，運動にストカスティシティが現われるのは，非線型性の強さと系の励起エネルギーとの間に特別な条件が満たされる場合だけである，というものであった．文献［112〜115］の事例ではこの条件が満されなかったので，系の運動はストカスティックにならずに，安定でかつ準周期的なものにとどまったのである.

（7.1）式の系にストカスティシティが現われるための条件を定性的な分析によって求めてみよう［116］．まず，次式で定義される新しい座標 q_k を導入する，

$$u_m=\left(\frac{2}{N}\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{N}q_k\sin\frac{\pi km}{N}. \tag{7.3}$$

これを（7.1）式に代入すると，q_k に対する次の方程式が得られる，

$$\ddot{q}_k+\omega_k^2\left[1-\frac{3\beta}{4N}\omega_k^2(2-\omega_k^2)q_k^2\right]q_k=\frac{\beta}{8N}\sum_{k_1,k_2,k_3}V_{kk_1k_2k_3}q_{k_1}q_{k_2}q_{k_3}. \tag{7.4}$$

ここで，$V_{kk_1k_2k_3}$ は k, k_1, k_2, k_3 の既知関数であり，また，ω_k は，

$$\omega_k=2\sin\frac{\pi k}{2N}, \tag{7.5}$$

である．方程式（7.4）も相互作用のある振動子の運動を記述している．パラメーター β が小さい場合には，相互作用が弱いので，第0近似としては，振動子間の相互作用が無いと考えてよい．このとき，第0近似の解 $q^{(0)}$ は，

$$q_k^{(0)}=C_k\cos\omega_k t$$

の形になる．この第1近似の解を次のように置こう，

$$\begin{aligned}q_k^{(1)}&=C_k(t)\cos\theta_k,\\ \theta_k&=\bar{\omega}_k t+\text{定数},\\ \bar{\omega}_k&=\omega_k+\delta\omega_k.\end{aligned} \tag{7.6}$$

ただし，$C_k(t)$ は振動運動の振幅であり，時間のゆっくりした関数であるとする．また，$\delta\omega_k$ は振動数の非調和性による補正項を表わし，

$$\delta\omega_k=-\frac{3\beta}{8N}\omega_k^2(2-\omega_k^2)C_k^2, \tag{7.7}$$

で与えられる．（7.6）式を（7.4）式に代入すれば，第1近似の方程式として

$$\ddot{q}_k^{(1)}+(\omega_k+\delta\omega_k)^2q_k^{(1)}=\frac{\beta}{8N}\sum_{k_1,k_2,k_3}V_{kk_1k_2k_3}\times C_{k_1}C_{k_2}C_{k_3}\cos\theta_{k_1}\cos\theta_{k_2}\cos\theta_{k_3},$$

(7.8)

が得られる．いま，振動数の間で，

$$n\bar{\omega}_k+\sum_{i=1}^{3}n_i\omega_{ki}\approx 0,\quad n,\ n_i=\pm 1. \tag{7.9}$$

という関係が成り立つとすれば，これは，方程式(7.8)に共鳴相互作用が現われることを意味する．このときの共鳴の幅を求めるために，第4.3節の手法を使おう．まず(7.8)式の左辺に(7.6)式を代入して，$C_k(t)\approx 0$，であることに注意すると，次の方程式が得られる，

$$-2\bar{\omega}_k\dot{C}_k\sin\theta_k=\frac{\beta}{8N}\sum_{k_1,k_2,k_3}V_{kk_1k_2k_3}C_{k_1}C_{k_2}C_{k_3}\times\cos\theta_{k_1}\cos\theta_{k_2}\cos\theta_{k_3}. \tag{7.10}$$

つぎに，(7.10)式において，共鳴条件(7.9)式を満足する項のみを考慮する．そのためには，たとえば，次のような項のみを考えればよい，

$$\dot{C}_k\approx\frac{\beta V_{kk_1k_2k_3}}{64N\bar{\omega}_k}C_{k_1}C_{k_2}C_{k_3}e^{i(\theta_k+\theta_{k_1}-\theta_{k_2}-\theta_{k_3})}. \tag{7.11}$$

振幅が ΔC_k だけずれたために，共鳴に $\Delta\omega_k$ の幅が生じたと考えると，これらの間には次の関係式が成り立つ，

$$\Delta\omega_k=\frac{d\bar{\omega}_k}{dC_k}\Delta C_k=\frac{d\delta\omega_k}{dC_k}\Delta C_k. \tag{7.12}$$

逆に，振動数が共鳴条件(7.9)から $\Delta\omega_k$ だけずれれば，これは，(7.11)式を通じて C_k の変化率にも影響する．この影響による C_k のずれ ΔC_k は，(7.11)式を時間について積分すれば得られる．このとき，(7.11)式の指数関数の指数部分が $i\Delta\omega t$ 程度になることに注意すれば，近似的に，評価式，

$$\Delta C_k\approx\frac{\beta}{64N\omega_k}V_{kk_1k_2k_3}C_{k_1}C_{k_2}C_{k_3}\frac{1}{\Delta\omega_k},$$

が導かれる．この評価式と(7.13)式から，振鳴の幅に対する表式が次のように求まる，

$$\Delta\omega_k\approx\left(\frac{\beta}{64N\omega_k}V_{kk_1k_2k_3}C_{k_1}C_{k_2}C_{k_3}\frac{d\delta\omega_k}{dC_k}\right)^{1/2}. \tag{7.13}$$

なお，ここまでの計算は，以前に弧立した共鳴と名づけた場合にも適用できる．

つぎに，隣接する共鳴間の間隔を評価しよう．これはスペクトルの構造から決められる．その間隔を振動数で表わして，Δ_k と置くと，Δ_k は(7.5)式から，

$$\Delta_k\approx\omega_{k+1}-\omega_k\approx\frac{d\omega_k}{dk}=\frac{\pi}{N}\cos\frac{\pi k}{2N}, \tag{7.14}$$

と与えられる．さて，ストカスティシティが発生する条件は，共鳴が重複する条件として，

$$\bar{K}=\frac{\Delta\omega_k}{\Delta_k}\gtrsim 1 \tag{7.15}$$

と書ける．これは，また，相互作用の強さを表わすパラメーターβに対する条件として，

$$\beta\gtrsim\beta_0 \tag{7.16}$$

と書くこともできる．ただし，β_0は$\bar{K}=1$という条件から定められる臨界値である．ところで，(7.15) 式の基準を，非線型性の強さを表わす無次元のパラメーターで表現しておくと後で便利である．このパラメーターεは，(7.2) 式と (7.3) 式から，次のように定義される，

$$\varepsilon\approx 3\beta\omega^2u^2\approx 3\beta E/N. \tag{7.17}$$

ただし，Eは弦の全振動エネルギーである．このεとともに，ここで新たに，励起モードの平均的な数kを導入すると，ストカスティシティの基準が，(7.15) 式～(7.17) 式により，

$$\varepsilon>\frac{定数}{k}, \tag{7.18}$$

の形に書けることが示される [116].

したがって，逆に，条件 (7.18) 式が満たされない場合，つまり，(7.18) 式と逆の不等式，

$$\varepsilon<\frac{定数}{k}, \tag{7.19}$$

が成り立つ場合には，運動は準周期的にとどまる．(7.19) 式の条件は KAM 定理からも導かれるが，これは，とにかく，文献 [112] の予想に反した結果を説明する．要するに，弦の（あるいは振動子の弦の）運動が熱化するためには，充分に強く励起されたモードが充分に大きな数kだけ必要であったが，文献 [112] で使われたパラメーターでは，その数kが非線性の強さεに較べて小さかったのである．こうして，FPU パラドックスは定性的にではあるが解決された．イヅライエフとチリコフによる数値解析もこのような定性的な議論を確認している [116, 117]．なお，2次元的な弦の場合にも，同様なストカスティシティが発生するためのしきい値が見い出されている [118].

7. 2　波動場のストカスティック化

相互作用のあるフォノンのハミルトニアン．減衰のスペクトル，離散的写像の構成，安定性の条件とストカスティシティの条件，自由度の数の役割，多次元系のコルモゴロフエントロピー．

FPU問題の研究は，自由度の大きい系に見られる混合運動を解析したほんの1例に過ぎない．以下では，もっと広い立場から非線型の波動場を考察しよう（注釈2を参照）．はじめに，非線型の波動場のハミルトニアンが次の展開式で与えられるとする，

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k}\dot{u}_{k}^{2}+\frac{1}{2}\sum_{k}\omega_{k}^{2}u_{k}^{2}+\frac{1}{3}\beta\sum_{k_1,k_2,k_3}V_{k_1k_2k_3}\,u_{k_1}u_{k_2}u_{k_3}$$
$$\times\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)+\frac{1}{4}\beta^2\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4}V_{k_1k_2k_3k_4}\,u_{k_1}u_{k_2}u_{k_3}u_{k_4}$$
$$\times\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)+\cdots. \tag{7.20}$$

ここで，βは変数$\boldsymbol{u}$についてのべき展開の小さな展開パラメーターである．展開式（7.20）では，β^2の項まで，すなわち，$\boldsymbol{u}^4$の項まで取り入れてある．関数$\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\cdots)$は，波数$\boldsymbol{k}$のスペクトルが離散的である場合にはクロネッカーのデルタ$\delta_{0,k_1+k_2+\cdots}$を意味し，また波数$\boldsymbol{k}$のスペクトルが連続的である場合には通常のディラックのδ関数を意味する．後者の場合，$\boldsymbol{k}$についての総和は$\boldsymbol{k}$についての積分に置き換えられるとする．

展開式（7.20）は，相互作用の弱い振動子の系あるいはフォノンの系のエネルギーとみなすことができる．以下では，この後者の立場を取ることが多いであろう．関数$V_{k_1k_2k_3}$と$V_{k_1k_2k_3k_4}$は一般に次の対称性の条件を満たす，

$$V_{k_1k_2k_3}=V_{k_2k_1k_3}=V_{k_1k_3k_2}=\cdots,$$
$$V_{k_1k_2k_3k_4}=V_{k_2k_1k_3k_4}=V_{k_2k_1k_4k_3}=\cdots.$$

波数$\boldsymbol{k}$は離散的であり，そして1つの波数と隣りの波数との間隔の代表値が$\Delta\boldsymbol{k}$であるとする．これに対応して，振動数のスペクトルも離散的になり，その間隔の代表値は，

$$\Omega_k=\frac{d\omega_k}{dk}\Delta k, \tag{7.21}$$

となる．

フォノンのガスが熱的な平衡状態に達する条件を求めるための補助的な議論を2つ程おこなっておこう.

その1つは，フォノンが共鳴相互作用をする可能性についてである．変数の時間発展の問題では，幾つかのモード間の共鳴が特別な役割を演じることを前節ですでに指摘した．共鳴条件を一般的な形で表わすと，

$$\sum_j n_j \omega_j = 0, \tag{7.22}$$

と書ける．ただし，n_jは（正または負の）整数である．しかし，いまの問題で重要なのは，条件（7.22）式の特別な場合，すなわち，

$$\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}_1} + \omega_{\boldsymbol{k}_2}, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2, \tag{7.23}$$

の2式が同時に満たされる場合であることが後でわかるであろう．この（7.23）式は3個の波動の相互作用を記述している，すなわち，運動量 $\boldsymbol{k}$ の1個の波動が運動量 $\boldsymbol{k}_1$ と運動量 $\boldsymbol{k}_2$ の2個の波動に崩壊する過程，または，運動量 $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ の2個の波動が運動量 $\boldsymbol{k}$ の1個の波動に併合する過程を記述する（図7.1を参照)．通常，関係式（7.23）は，フォノンが相互作用するときのエネルギーと運動量の保存則を表わすと解釈される．(7.23) 式で，振動数に対する条件〔(7.22) 式〕だけでなく運動量の保存則が現われたのは，平行移動に対する系の不変性を表わす δ 関数がハミルトニアン（7.20）式に含まれていたからである．また，4個の波動の相互作用は，図7.2に示した過程で表現される．これらの過程では，(7.23) 式からの類推から，次の関係式が満たされる.

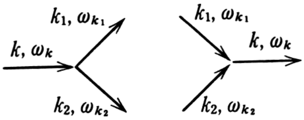


図 7.1 3個の波動の過程
(a) 波の崩壊過程
(b) 波の併合過程

$$\begin{aligned} &\omega_{\boldsymbol{k}_1} + \omega_{\boldsymbol{k}_2} = \omega_{\boldsymbol{k}_3} + \omega_{\boldsymbol{k}_4}, \quad \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4; \\ &\omega_{\boldsymbol{k}_1} = \omega_{\boldsymbol{k}_2} + \omega_{\boldsymbol{k}_3} + \omega_{\boldsymbol{k}_4}, \quad \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4 \end{aligned} \tag{7.24}$$

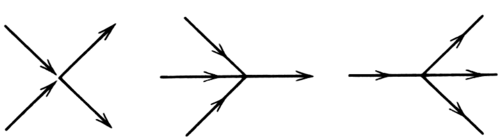


図 7.2 4個の波動の過程の例

一般に ω_k は $\boldsymbol{k}$ の関数 $\omega(\boldsymbol{k})$ として与えられるので，方程式系（7.23）は $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ についての1組の方程式とみなすことができる．この方程式系は必ずしも解をもつとは限らない．それは $\omega(\boldsymbol{k})$ の関数形に依存する．方程式系（7.23）が解をもつか否かによって，波動スペクトル $\omega(\boldsymbol{k})$ は，それぞれ，崩壊型とか非崩壊

型と言われる．ある波動スペクトルが，3個の波動の相互作用では非崩壊型であっても4個の波動の相互作用では崩壊型になる場合があり，また，1次元の時には非崩壊型であるが，2次元の時には崩壊型になる場合もある．図7.3において，図(a)は，1次元的な3個の波動が相互作用する場合の非崩壊型の波動スペクトルの例を示し，図(b)は同じ場合の崩壊型の波動スペクトルの例を示す．方程式系（7.23）が解をもつか否かをスペクトルの図上で決定する方法を図7.4で例示してある．

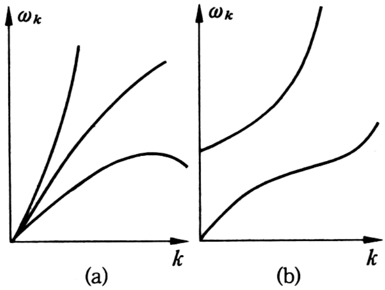


図 7.3　1次元3個の波動での，(a)非崩壊型，(b)崩壊型スペクトル，の例．

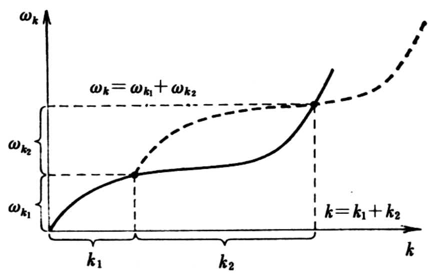


図 7.4　1次元の場合の方程式系（7.23）の図解の例．

取り扱いを簡単にするために，ハミルトニアン（7.20）式の u の4次とそれ以上の次数の項が無視できると仮定すると，運動方程式は次のようになる，

$$\ddot{u}_{k_1}+\omega_k^2 u_{k_1}=-\beta\sum_{k_2,k_3} V_{k_1k_2k_3}u_{k_2}u_{k_3}\delta(k_1-k_2-k_3). \tag{7.25}$$

この系の崩壊過程による不安定性を調べよう［110, 111］．第0近似としては，u_k を

$$u_k=u_k^{(0)}\cos(\omega_k t+\varphi_{k,(0)}), \tag{7.26}$$

にとることができる．いま，波数が $k_3=k$ で振幅が u_k の1個の波動だけが励起されており，そして，(7.25) 式の摂動項として，非常に小さい振幅 u_{k_1} および u_{k_2} をもち，波数 k_1 および k_2 をもつ2個の波動が先の1個の波動と相互作用するとしよう．(7.25) 式から，u_{k_1}，u_{k_2} の運動方程式は，

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{k_1}+\omega_{k_1}^2 u_{k_1}&=-\beta V_{k_1k_2k}u_k^{(0)}u_{k_2}\cos(\omega_k t+\varphi_{k,(0)})\\ \ddot{u}_{k_2}+\omega_{k_2}^2 u_{k_2}&=-\beta V_{k_2k_1k}u_k^{(0)}u_{k_1}\cos(\omega_k t+\varphi_{k,(0)})\end{aligned} \tag{7.27}$$

となる．これを解くために，u_{k_1}，u_{k_2} を

$$u_{k_1}=C_1(t)\cos\omega_{k_1}t,$$
$$u_{k_2}=C_2(t)\cos\omega_{k_2}t,$$

と置く．この表式を（7.27）に代入して，共鳴項のみを残し，また，$\ddot{C}_1(t)$ と

$C_2(t)$ を無視すると，次式を得る，

$$\dot{C}_1(t)=\frac{\beta V}{2\omega_{k_1}}u_k^{(0)}\,C_2(t),$$
$$\dot{C}_2(t)=\frac{\beta V}{2\omega_{k_2}}u_k^{(0)}\,C_1(t). \tag{7.28}$$

ただし，$V_{k_1k_2k}=V_{k_2k_1k}$ を V と置いた．(2.9) 式は直ちに積分できて，

$$C_{1,2}(t)=C_{1,2}(0)\exp(\pm\nu_k t)$$

が得られる．ここで ν_k は不安定性の成長率であり，

$$\nu_k=\frac{\beta|Vu_k^{(0)}|}{2(\omega_{k_1}\omega_{k_2})^{1/2}} \tag{7.29}$$

で与えられる．ところで，上述の解析が3個の波動の時間発展の初期においてのみ有効であるという意味で，(7.29) 式は不安定性の成長率の1つの目安を与えるに過ぎない．時間が長時間経過すると，波動の振幅が大きくなり，上述の分析で無視した非線型項が重要になるので，(7.27) 式は正しくなくなる．このような場合の分析は後でおこなおう．

第2の補助的議論は運動方程式 (7.25) の右辺の書き換えについてである．6.3節において (6.69) 式を (6.71) 式に書き換えたが，(7.25) 式の右辺についても同様のことが可能であることを以下で示そう．ハミルトニアン (7.20) 式から運動方程式を導き，それに第0近似 (7.26) 式を代入すると，次の関係式が得られる，

$$\ddot{u}_k+\bar{\omega}_k^2u_k=-\beta\sum_{k_1,k_2}V_{kk_1k_2}\,u_{k_1}^{(0)}\,u_{k_2}^{(0)}\,\delta(k-k_1-k_2)$$
$$\times\cos(\omega_{k_1}t+\varphi_{k_1,(0)})\cos(\omega_{k_2}t+\varphi_{k_2,(0)}). \tag{7.30}$$

ただし，(7.20) 式の β^2 の項からの寄与については，共鳴相互作用のみを取り，さらに，それを ω_k に対する補正として $\bar{\omega}_k$ のなかに取り入れた．したがって，$\bar{\omega}_k$ は，

$$\bar{\omega}_k\approx\omega_k+\frac{3}{4}\beta^2\frac{1}{\omega_k}\sum_{k_1}V_{k,-k,k_1,-k_1}(u_{k_1}^{(0)})^2, \tag{7.31}$$

となる．なお，(7.31) 式の第2項の数係数は必ずしも正確である必要がないことに注意する．さて，(7.30) 式から，その右辺の時間依存性は，

$$\exp[\pm i(\omega_{k_1}\pm\omega_{k_2})t].$$

の和で表わされることがわかる．したがって，振動数の間隔 Ω_k が (7.21) 式で与えられ，かつ，行列要素 $V_{kk_1k_2}$ と振幅 $u_k^{(0)}$ が k のゆっくりした関数であることを仮定すると，(7.30) 式は次式で近似することができる，

$$\ddot{u}_k+\bar{\omega}_k^2 u_k \approx -\frac{1}{4}\beta V u^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\Omega t)$$

$$= -\frac{1}{2}\pi\beta V \frac{u^2}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT),$$

$$T \equiv \frac{2\pi}{\Omega}. \tag{7.32}$$

ただし，V, u, Ω は，それぞれ，$V_{kk_1k_2}$，$u_k^{(0)}$，Ω_k の考えている波動集団に関する平均値である．一般に，(6.72) 式と同様に不等式，

$$\frac{\Omega_k}{\omega_{\max}-\omega_{\min}} \ll 1, \tag{7.33}$$

が成り立つ，すなわち，励起された全振動数の幅は振動数の代表的間隔に較べて大きい．いま，とくに，$\omega_{\min} \ll \omega_{\max}$ であるならば，不等式 (7.33) は次の関係式を意味する，

$$N=\frac{\omega_{\max}}{\Omega} \gg 1.$$

ここで，N は励起されたモードの数を表わす．(7.30) 式の代りに近似式 (7.32) を使う理由は，時間的に連続的な問題 (7.30) 式が時間間隔 T の離散的写像の問題 (7.32) 式に転換できた点にある．ここで，この写像の利点について注意しておこう．その第 1 点は，振動子の断熱不変量が本質的な変化を受ける瞬間（つまり，δ 関数のパルスの瞬間）をあらわに表現できることである．第 2 点は，δ 関数の係数が断熱不変量の変化量そのものを表わしていることである（注釈 3 を参照）．

さて，議論を本題に戻そう．我々はすでに第 4 章において (7.32) 式の形の方程式を解析しているので，そこでの結果を利用すれば充分に以下の議論を進めることができる．まず，u_k と $\dot{u}_k$ を，

$$u_k=\left(\frac{I_k}{2\bar{\omega}_k}\right)^{1/2} e^{i\theta k}+\text{C.C.},$$

$$\dot{u}_k=i\left(\frac{\bar{\omega}_k I_k}{2}\right)^{1/2} e^{i\varphi k}+\text{C.C.} \tag{7.34}$$

と置くと，方程式 (7.32) は次のハミルトニアンのモデルの問題と等価になる，

$$H_k \approx \bar{\omega}_k I_k+\frac{2\pi V_0}{\Omega_k}\left(\frac{2I_k}{\omega_k}\right)^{1/2} \cos\theta_k \sum \delta(t-nT),$$

$$\theta_k=\bar{\omega}_k t+\varphi_{k,(0)}, \tag{7.35}$$

$$V_0=\frac{1}{4}\pi\beta V\frac{I}{\omega}.$$

4.1 節の議論によると，ハミルトニアン（7.35）式は，δ 関数の第 n 回目のパルスと第 $n+1$ 回目のパルスの間の写像として，次の関係式を与える，

$$I_{k,(n+1)}=I_{k,(n)}+\Delta I_{k,(n)}$$
$$\theta_{k,(n+1)}=\theta_{k,(n)}+2\pi\frac{\omega_k}{\Omega_k}+\frac{2\pi}{\Omega_k}\sum_{k_1}\frac{\partial\bar{\omega}_k}{\partial I_{k_1,(n)}}\Delta I_{k_1,(n)}. \qquad (7.36)$$

ここで，$\Delta I_{k,(n)}$ は，運動方程式，

$$\dot{I}_k=-\frac{\partial H_k}{\partial\theta_k}=\frac{2\pi V_0}{\Omega_k}\left(\frac{2I_k}{\omega_k}\right)^{1/2}\sin\theta_k\sum_n\delta(t-nT),$$

を $t=nT$ の近傍で積分して得られる I_k の増加量である，すなわち，

$$\Delta I_{k(n)}=\frac{2\pi V_0}{\Omega_k}\left(\frac{2I_{k,(n)}}{\omega_k}\right)^{1/2}\sin\theta_{k,(n)}, \qquad (7.37)$$

である．また，(7.36) 式の位相（θ_k）に対する方程式の後の項は，1 周期 $2\pi/\Omega_k$ の間の非線型性による振動数の補正項を表わす．(7.37) 式を (7.36) 式に代入すれば，(7.36) 式は次のようになる，

$$I_{k,(n+1)}=I_{k,(n)}+\frac{2\pi V_0}{\Omega_k}\left(\frac{2I_{k,(n)}}{\omega_k}\right)^{1/2}\sin\theta_{k,(n)}$$
$$\theta_{k,(n+1)}=\theta_{k,(n)}+2\pi\frac{\omega_k}{\Omega_k}+\sum_{k_1}K_{kk_1}\sin\theta_{k_1,(n)}. \qquad (7.38)$$

ただし，K_{kk_1} は次式で定義される，

$$K_{kk_1}\equiv\left(\frac{2\pi}{\Omega_k}\right)^2V_0\left(\frac{2I_{k_1}}{\omega_{k_1}}\right)^{1/2}\frac{\partial\bar{\omega}_k}{\partial I_{k_1}}. \qquad (7.39)$$

$\bar{\omega}_k$ に対しては (7.31) 式を使い，また，u_k が (7.34) 式で与えられることに注意すると，(7.39) 式の K_{kk_1} は近似的に，

$$K_{kk_1}\approx\frac{\beta^2u_{k_1}}{\omega_k^2\Omega_k^2}V_0V_{k,-k,k_1,-k_1} \qquad (7.40)$$

となる．この表式はもっとエレガントな形に書き直すこともできる．そのために，元のハミルトニアン (7.20) の構造に注目しよう．このハミルトニアンによると，非線型性を表わす無次元のパラメーターとして，

$$\varepsilon_k=\beta u_k \qquad (7.41)$$

という量をとることができる（同時に，この量は摂動の強さを意味する）．一方，行列要素 $V_{k_1k_2k_3}$ または $V_{k_1k_2k_3k_4}$ の詳細な構造を無視して，これらの大きさはみな同じ程度であると仮定すれば，

$$V\approx\omega_k^2,\quad V_{k,-k,k_1,-k_1}\approx\omega_k^2. \qquad (7.42)$$

が成り立つ．(7.41) 式と (7.42) 式を用いると，(7.40) 式は次のように書き換

えられる,

$$K \approx \varepsilon_k^3 \frac{\omega_k^2}{\Omega_k^2} = \varepsilon_k^3 \frac{\omega_k^2}{\left(\dfrac{d\omega_k}{dk}\Delta k\right)^2}. \tag{7.43}$$

写像 (7.38) 式に関するこれから先の解析は，第4章のストカスティシティのユニバーサルモデルの場合と非常によく似た解析になる〔(4.9) 式を見よ〕. (7.38) 式の初めの式から始めよう. (7.37) 式に V_0 の表式 (7.35) を代入すると,

$$\Delta I_{k,(n)} = \frac{1}{2}\pi^2\beta\left(\frac{2I_{k,(n)}}{\omega_k}\right)^{1/2}\frac{V}{\omega_k\Omega_k}I_{k,(n)}\sin\theta_{k(n)}$$

が得られ，さらに，定義式 (7.41) と評価式 (7.42) を考慮すると，これは,

$$\Delta I_{k,(n)} = \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon_k\frac{\omega_k}{\Omega_k}I_{k,(n)}\sin\theta_{k,(n)}$$

となる. この表式から，結局，$\Delta I/I$ が,

$$\frac{\Delta I}{I} \approx \varepsilon\frac{\omega}{\Omega} \ll 1, \tag{7.44}$$

と評価できる. これは，δ 関数の1個のパルスから受ける作用変数の変化 ΔI が小さい場合には，摂動論が適用可能であることを意味する. なお，その場合，ω/Ω は必ずしも小さくないが，(7.44) 式の左辺全体は小さい値になることに注意する.

つぎに，(7.38) 式の位相 ($\theta_{k,(n+1)}$) に対する方程式を考えよう. K の表式 (7.43) を見ると，K の大小関係は (7.44) 式の条件と必ずしも一致していないことがわかる. もしも，(7.44) 式とともに K が小さいという条件が満されるならば，δ 関数の1回のパルスから受ける位相の変化と作用変数の変化の両者が小さくなる. その場合には，第1近似として系が安定になることは明らかである. しかし，逆に,

$$K \approx \frac{\varepsilon^3\omega^2}{\left(\dfrac{d\omega}{dk}\Delta k\right)^2} \gg 1 \tag{7.45}$$

の場合には，事情が違ってくるので，この場合を詳しく調べよう.

$K \gg 1$ の場合，位相の変化はほとんど到る所で大きな値になる. 実際に，(7.38) 式から，関係式

$$\frac{\partial\theta_{k,(n+1)}}{\partial\theta_{k',(n)}} = \delta_{kk'} + K_{k,k',(n)}\cos\theta_{k',(n)}, \tag{7.46}$$

が得られるが，これは，位相空間で，$\theta = \pi/2$, $3\pi/2$ の点を中心にした $1/K$ の幅の領域を除く大部分の領域で，位相 θ_k が δ 関数のパルスごとに拡大されること

を意味する．したがって，(7.45) 式の条件のもとでは，ストカスティックな不安定性が波動の位相空間の大部分で成長する．逆に，運動が安定な領域は，

$$K_{kk'}\cos\theta_{k'}\lesssim 1 \tag{7.47}$$

という条件で定められ，ストカスティックな領域の中に島の形で形成される．そして，その大きさは，Kの値が大きいければ大きい程，小さくなる．

位相に対する方程式 (7.38) と第4章で考察したユニバーサル変換との類似性は明らかであるが，これらの間には1つだけ本質的に異なった点がある．すなわち，位相の場合には，$K\gg 1$ を満たす多くの k と k' の値が存在することに対応して，θ_kが多くの“方向”に沿って拡大するという性質がある．この性質によって物理的に重要な結論が得られる．まず，系のコルモゴロフエントロピーへの影響を考えよう．

コルモゴロフエントロピーは，1.6節で極く定性的な議論にもとづいて，位相空間の粗視化した体積 $\overline{\Delta\Gamma}$ の不安定性の成長率として導入された〔(1.66) 式をみよ〕．すなわち，コルモゴロフ　エントロピーは，$\overline{\Delta\Gamma}$ が，

$$\overline{\Delta\Gamma}=\Delta\Gamma_0\, e^{ht}, \tag{7.48}$$

と表わされるときの h で定義された．N個の不安定な自由度が存在して，その各々の成長率が h_i である場合に (7.48) 式を一般化すれば，

$$\overline{\Delta\Gamma}=\Delta\Gamma_0 \exp\left(t\sum_{i=1}^{N}h_i\right), \tag{7.49}$$

となる．このとき，定義式 (1.68) を (7.49) 式に適用すれば，力学的コルモゴロフエントロピーは次式で表わされることがわかる，

$$h=\lim_{\Delta\Gamma_0\to 0}\ \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\overline{\Delta\Gamma}=\sum_{i=1}^{N}h_i. \tag{7.50}$$

雑な言い方をすれば，不安定な方向の数が N個であると，Kエントロピーは1個の場合の N倍になるということである．

いま考察している波動場に式 (7.50) を適用することは容易である．条件式 (7.45) が満たされていると，関係式 (7.46) から，

$$\left|\frac{\partial\theta_{k,(n+1)}}{\partial\theta_{k',(n)}}\right|\approx K_{k,k'}\gg 1, \tag{7.51}$$

を得る．ここで，$\cos\theta_{k,(n)}$ は計算の簡単化のために省略した．さて，写像を n 回繰り返した後の体積要素を

$$D(\theta_{k,(n)})=d\theta_{k1,(n)}\,d\theta_{k2,(n)}\cdots d\theta_{kN,(n)},$$

と置こう．この体積要素と初期の体積要素と比は，ヤコビアンを用いて，

$$\frac{D(\theta_{k,(n)})}{D(\theta_{k,(0)})}=\left|\frac{\partial\theta_{k_i,(n)}}{\partial\theta_{k_j,(0)}}\right|,\quad i,j=1,2,\cdots N,$$

で与えられる．ヤコビアンの間に成り立つ恒等式，

$$\left|\frac{\partial\theta_{k_i,(n)}}{\partial\theta_{k_j,(0)}}\right|=\left|\frac{\partial\theta_{k_i,(n)}}{\partial\theta_{k_j,(n-1)}}\right|\left|\frac{\partial\theta_{k_i,(n-1)}}{\partial\theta_{k_j,(n-2)}}\right|\cdots\left|\frac{\partial\theta_{k_i,(1)}}{\partial\theta_{k_j,(0)}}\right|$$

の右辺に表式（7.51）を適用すると，右辺のヤコビアンが評価できる．その評価式を前述のヤコビアンに代入すれば，関係式，

$$D(\theta_{k,(n)})\approx(N^2K^N)^n D(\theta_{k,(0)}),\tag{7.52}$$

を得る．ここで，K は $K_{kk'}$ の代表的な値であり，Nは，相互作用している波動の数である．（7.50）式の $\Delta\Gamma$ として（7.52）式の $D(\theta_{k,(n)})$ を代入すれば，h に対する次の表式が導かれる，

$$h\approx N\log K+2\log N\approx N\log K.\tag{7.53}$$

ただし，ここで $N\gg 1$ を仮定している．（7.53）式の主要な項（$N\log K$）は，変数のひき伸しが位相空間の N 個の方向で独立に生じる系の K エントロピーに対する標準的な表式になっている．なお，（7.53）式の第2項（$2\log N$）は，考えている系では各自由度が独立でないことに由来する補正項である．

表式（7.53）は，いまの波動系の位相空間上の不安定性の成長率が自由度1の系と較べて N 倍になることを明確に示している．したがって，波動系の位相の相関消滅時間は $1/N$ に短縮することが予想される．それを確かめるために，次の相関関数を考えよう，

$$\mathscr{R}_k(t)=\langle\!\langle\exp i(\theta_{k,(n)}-\theta_{k,(0)})\rangle\!\rangle.\tag{7.54}$$

ここで，t は，

$$t\simeq\frac{2\pi n}{\Omega}$$

であり，二重括弧《…》は初期の位相についての積分，

$$\begin{aligned}\langle\cdots\rangle&=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}d\theta_{k_1,(0)}\,d\theta_{k_2,(0)}\cdots d\theta_{k_N,(0)},\\&=\frac{1}{(2\pi)^N}\int D(\theta_{k,(0)}),\end{aligned}\tag{7.55}$$

を意味する．この相関関数を次のようにして評価しよう．まず，不等式（7.45）式が成り立つことを考慮する，そして，位相に対する漸化式（7.38）の中で最も速く振動する部分のみを取って，$(\theta_{k,(n)}-\theta_{k,(0)})$ を計算すると，次の表式を得

る，

$$\theta_{k,(n)}-\theta_{k,(0)}\approx\omega_k t+\sum_{k_1}K_{kk_1}\sin\{\sum_{k_2}K_{k_1k_2}$$
$$\times\sin[\sum_{k_3}K_{k_2k_3}\cdots\sin(\sum_{k_n}K_{k_{n-1},k_n}\sin\theta_{k_n,(0)})]\}. \tag{7.56}$$

この表式を（7.54）式に代入した後に，4.1節で行なった停留位相の方法で積分する．途中の複雑な計算式は省略して，最終の結果のみを書くと，次のようになる．

$$\mathscr{R}_k(t)\approx\exp\left(-\frac{t}{\tau_k}+i\omega_k t\right). \tag{7.57}$$

ここで，τ_kは緩和時間を表わし，

$$\tau_k=\frac{2}{\Omega_k N\log K}=\frac{2}{\left|\dfrac{d\omega_k}{dk}\right|\Delta kN\log K}, \tag{7.58}$$

で与えられる．この（7.58）式は予期された結果である，すなわち，緩和時間は，混合性をもつ自由度の数（N）に確かに反比例している．言うまでもなく，いまの場合の自由度は位相の自由度である．（7.53）式と（7.58）式を比較すると，無次元の緩和時間（位相が混合する時間）$\tau_k\Omega_k$ と K エントロピーとの間に次の関係式が成り立つことがわかる，

$$h\sim\frac{1}{\tau\Omega}. \tag{7.59}$$

関係式（7.53），（7.58）および（7.59）は，振動系または波動系のある意味の普遍的性質を表わしている．これらの普遍的性質は次のようにまとめることができる．

(i) 非線型性と摂動が小さい場合でも，位相の運動には混合運動が生じる．

(ii) 混合性を特徴づける主要なパラメーターは位相のひき伸しパラメーターKである．

(iii) パラメーターK，エントロピーhおよび混合時間との間には普遍的な関係式が成り立つ（注釈4を参照）．

最後の議論として，ストカスティシティのしきい値にふれておこう．不等式（7.45）とは逆に，$K\ll1$ であると，（7.54）式で定義された$\mathscr{R}_k(t)$がKについての第1近似で指数関数的に減少することはない．したがって，

$$K_{kk_1}\approx1 \tag{7.60}$$

という関係式をストカスティシティのしきい値の条件と考えてよい．この(7.60)式は，k空間でストカスティックな波動の領域と規則的振動の領域を分ける境界

の k を定義する方程式であるとみなすことができる．また，(7.43) 式から，

$$\Omega_k = \frac{d\omega_k}{dk}\Delta k \to \infty$$

となる異常な分散関係の領域は，ストカスティシティが消滅して，運動が安定になる領域であることがわかる．

最後に，ストカスティシティのための基準 (7.45) 式は，7.1節のフェルミ－パスタ－ウラム問題と同様に共鳴が重複する条件からも導かれることを注意しておく．

7.3 波動場の運動論的記述

リュービル方程式の方法．初期条件の記憶の喪失．混合性の役割．

前節の考察によって，我々の主な目的を達成した．すなわち，波動の位相の運動がある条件のもとでストカスティックになる事実を明確にすることができた．波動の運動論的記述を得るのに必要な条件は正にこの事実なのである．そこで，運動論的記述がどのようにして導かれ，また，その途中で混合機構がどのように入り込むかを調べることは興味ある問題である．自由度が1の簡単な場合のこの種の問題はすでに6.2節で論じた．以下では，6.2節の方法に従って，波動系についてこの問題を考える [105]．

はじめに，作用－角変数 (I_k, θ_k) を用いてハミルトニアン (7.20) を次の形に書き換えよう，

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + V_{\mathrm{int}},\\
H_0 &= \sum_k \omega_k I_k\\
V_{\mathrm{int}} &= \beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}} \right)^{1/2} \{ V_{k_1 k_2 k_3} e^{i(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}+\theta_{k_3})}\ \delta(k_1+k_2+k_3)\\
&\quad + 3V_{k_1, k_2, -k_3} e^{i(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}+\theta_{k_3})}\ \delta(k_1+k_2-k_3)\\
&\quad + \mathrm{C.C.}\} + O(\beta^2). \qquad (7.61)
\end{aligned}$$

ここで，振動数 ω_k には非線型性による β^2 までの補正項が含まれているとする〔(7.31) 式をみよ〕．さらに，次のリュービル方程式を満たす位相空間上の分布関数 $f(I, \theta, t)$ を導入する，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k \frac{\partial f}{\partial \theta_k} = \sum_k \left(\frac{\partial V_{\mathrm{int}}}{\partial \theta_k}\frac{\partial f}{\partial I_k} - \frac{\partial V_{\mathrm{int}}}{\partial I_k}\frac{\partial f}{\partial \theta_k} \right),$$

$$f(I,\theta,t)f \equiv f(I_1,\theta_1;\ I_2,\theta_2;\ \cdots;\ t). \tag{7.62}$$

分布関数fは位相の周期関数なので，これを次の様に展開しよう，

$$f(I,\theta,t)=\sum_{(n)}\left[f^{(n)}(I,t)\,e^{i(n,\theta)}+\mathrm{C.C.}\right],$$

$$(n,\theta)\equiv\sum n_k\theta_k,\quad f^{(n)}=(f^{(-n)})^*,\quad (n)\equiv n_1,n_2,\cdots. \tag{7.63}$$

(6.17) 式と同じく，相互作用表示を採用すると，(7.62) 式の左辺の第2項を消去できるので便利である．この表示では，fは，

$$f(I,\theta,t)=\sum_{(n)}\left[f^{(n)}(I,t)\,e^{i(n\theta-\omega t)}+\mathrm{C.C.}\right], \tag{7.64}$$

と書ける．この (7.64) 式を (7.62) 式に代入すれば，$f^{(n)}$ に対する方程式として，

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t}=-i\beta\{Q_{n,n+1}f^{(n+1)}\,e^{-i[\omega]t}+Q_{n,n-1}f^{(n-1)}\,e^{i[\omega]t}\} \tag{7.65}$$

を得る．ただし，この (7.65) 式では，次式で定義される記号が用いられている，

$$Q_{n,n\pm1}\equiv 3\sum_{k_1,k_2,k_3}\left[V_{k_1,k_2,-k_3}\left(\frac{n_{k_1}}{2I_{k_1}}+\frac{n_{k_2}}{2I_{k_2}}-\frac{n_{k_3}}{2I_{k_3}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm\frac{\partial}{\partial I_{k_1}}\pm\frac{\partial}{\partial I_{k_2}}\pm\frac{\partial}{\partial I_{k_3}}\right)\left(\frac{I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\right)^{1/2}\delta_{[k],0}+\mathrm{C.C.}\right]$$

$$[\omega]\equiv\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3},\quad [k]\equiv k_1+k_2-k_3. \tag{7.66}$$

また，$\partial f/\partial t$ には崩壊型の条件 (7.23) 式を満たす項が大きく寄与するので，(7.66) 式にはそのような項だけを含めた．

$t=0$ では，(7.64) 式は，

$$f(I,\theta,0)=\sum_{(n)}\left[f^{(n)}(I,0)e^{i(n,\theta)}+\mathrm{C.C.}\right] \tag{7.67}$$

となる．一方，運動論的方程式を導くときによく使われる乱雑位相近似は，

$$f(I,\theta,0)=f(I) \tag{7.68}$$

という形に表わせる．(7.67) 式と (7.68) 式を比較すると，いまの場合，乱雑位相近似は次式で表わされる．

$$f^{(n)}(I,0)=f(I)\,\delta_{n,0}. \tag{7.69}$$

さて，つぎに論じたいことは，6.2節の議論と同じく，運動論的方程式の導出のための条件が混合性から得られること，言い換えれば，混合性から得られるある条件のもとでは，初期位相の乱雑性に関する仮定 (7.68) が不要になる経緯を示すことである．これが可能であると，系の運動論的記述は，1つの仮定（これが事実を反映しているかも知れないが）からの帰結ではなく，その系に本来的にそなわっている（固有の）性質の1つの表現となる．

まず，(7.65) 式をラプラス変換，

$$f_p^{(n)}=\int_0^\infty dt\, e^{-pt} f^{(n)}(I,t)$$

で表わすと，

$$pf_p^{(n)}-f^{(n)}(I,0)=-i\beta(Q_{n,n-1}f_{p-i[\omega]}^{(n-1)}+Q_{n,n+1}f_{p+i[\omega]}^{(n)}), \tag{7.70}$$

が得られる．この式で $n=0$ と置けば，

$$pf_p^{(0)}-f^{(0)}(I,0)=-i\beta(Q_{0,-1}f_{p-i[\omega]}^{(-1)}+Q_{0,1}f_{p+i[\omega]}^{(1)}) \tag{7.71}$$

となる．さらに (7.70) 式で $n=\pm1$ と置けば $f_p^{(1)}$ と $f_p^{(-1)}$ に対する表式が得られる．そして，それらを (7.70) 式に代入して，β^2 の項までの近似をとると，次式が得られる，

$$pf_p^{(0)}-f^{(0)}(I,0)=-i\beta\left(Q_{0,-1}\frac{f^{(-1)}(I,0)}{p-i[\omega]}+Q_{0,1}\frac{f^{(1)}(I,0)}{p+i[\omega]}\right)$$
$$-\beta^2Q_{0,-1}Q_{0,1}\frac{f^{(0)}(I,0)}{p^2+[\omega]^2}. \tag{7.72}$$

(7.72) 式の段階では乱雑位相近似に相当する条件 (7.68) 式または (7.69) 式は使われていない．このことは形式的にも，$f^{(\pm1)}(I,0)$ が (7.72) 式に現われていることから明らかである．上述の逐次近似をさらに進めると，初期条件のもっと高次の高調波が現われるだろう．

つぎに，(7.72) 式を t 表示（逆ラプラス変換）に戻して，$t\to\infty$ の漸近形を考えると，次の方程式が導かれる，

$$\frac{\partial f^{(0)}(I,t)}{\partial t}=-i\beta[Q_{0,-1}\,e^{-i[\omega]t}f^{(-1)}(I,0)$$
$$+Q_{0,1}\,e^{i[\omega]t}f^{(1)}(I,0)]+4\pi\beta^2\sum_{k_1,k_2,k_3}\frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}$$
$$\times\delta([\omega])\delta_{[k],0}\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]f^{(0)}(I,t). \tag{7.73}$$

ただし，$[\partial/\partial I]$ は，

$$\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]=\left(\frac{\partial}{\partial I_{k_1}}+\frac{\partial}{\partial I_{k_2}}-\frac{\partial}{\partial I_{k_3}}\right),$$

を意味する．(7.63) 式は割合と簡単な構造になっている．まず，β に比例する項は，$f^{(\pm1)}(I,0)$ に比例していることから明らかなように，初期位相の情報を保持している．また，他の残りの項はフォッカー－プランク型の拡散項の構造をもっており，プリゴジン－ブロート型の運動論的方程式の拡散項に対応する．

さて，ここで，次のように初期位相で粗視化した分布関数 $F(I,t)$ を新たに導

入しよう，

$$F(I,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi} d\theta_{k_1,(0)}\, d\theta_{k_2,(0)}\cdots d\theta_{k_N,(0)}\, f^{(0)}(I,t)$$
$$=\langle\langle f^{(0)}(I,t)\rangle\rangle. \qquad (7.74)$$

ただし，Nは自由度の数，すなわち，系の励起された波動モードの数である．この粗視化の操作を（7.63）式にほどこすと，（7.63）式は，

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-i\beta[Q_{0,-1}\langle\langle e^{-i[\omega]t}\rangle\rangle f^{(-1)}(I,0)+Q_{0,1}\langle\langle e^{i[\omega]t}\rangle\rangle f^{(1)}(I,0)]$$
$$+4\pi\beta^2\sum_{k_1,k_2,k_3}\frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\delta([\omega])\delta_{[k],0}\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]F. \qquad (7.75)$$

に書き換えられる．もしも，ここで，振動数 ω_k が振幅に依存しなければ（つまり，振動数に非線型性の影響がなければ），$\langle\langle\exp(\pm i[\omega]t)\rangle\rangle=\exp(\pm i[\omega]t)$ となるので，（7.75）式は元の（7.73）式と何ら変らないものになる．言い換えれば，振動数が振幅に依存しない場合には，初期位相についての平均操作を行なっても運動論的記述は得られない．

一方，ハミルトニアン（7.61）式の振動数 ω_k には β^2 に比例する補正項 $\delta\omega_k$ が含まれていることを考慮に入れると，事情がかわってくる．補正項 $\delta\omega_k$ は表式（7.7）で与えられている．また，（7.75）式では，系の初期位相の記憶が相関関数，

$$\mathscr{R}_{k_1k_2k_3}(t)=\langle\langle e^{\pm i[\omega]t}\rangle\rangle$$
$$=\langle\langle e^{\pm i\{[\theta(t)]-[\theta(0)]\}}\rangle\rangle, \qquad (7.76)$$

の形ではいっている〔表式（7.54）と（7.55）を見よ〕．ここで，混合性の条件（7.45）式が満たされるとすれば，（7.57）式により，相関関数（7.76）式は時間の関数として指数関数的に減少する．このときの相関消滅時間は，（7.58）式で与えられ，τ_k 程度である．この消滅時間より後では，（7.75）式は，

$$\frac{\partial F}{\partial t}=4\pi\beta^2\sum_{k_1,k_2,k_3}\frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\delta[\omega]\delta_{[k],0}\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]$$
$$\times I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}\left[\frac{\partial}{\partial I}\right]F, \qquad (7.77)$$

という運動論的方程式になる．

以上の処方について，2つの注意をしなければならない．第1の注意は，（7.77）式で本当は $\bar{\omega}_k=\omega_k+\delta\omega_k$ と書くできところを単に ω_k と書いたことについてである．しかし，$\bar{\omega}_k$ を ω_k と書いた場合の補正項は β^4 の程度の量であり，いま

考えている精度では，無視して差し支えない．第2の注意は，(7.70) 式から (7.72) 式までの過程で振動数 ω を時間に依存しない量として取り扱った点についてである．上述の諸式における ω_k は $\bar{\omega}_k$ を意味するので，ω_k は時間に依存するが，その時間依存性も無視し得る程度のものである．何故ならば，相関関数が消滅するまでの時間 τ_k が振動の周期 ($\sim 1/\omega_k$) に較べて小さい，すなわち，

$$\tau_k\omega_k \approx \frac{\omega_k}{N\Delta k\left|\dfrac{d\omega_k}{dk}\right|\log K} \approx \frac{\omega_k}{\max\omega_k \log K} \ll 1$$

であるので，ω_k がわずかに変化しても，それの τ_k への影響は極めて小さいからである．

ところで，混合性の条件 (7.45) 式が満たされない場合には，相関関数 $\mathscr{R}_{k_1k_2k_3}$ が時間のべき関数より速く減衰することはないので，$\mathscr{R}_{k_1k_2k_3}$ の寄与を無視するわけにいかない．それ故，(7.77) 式の形の運動論的方程式は得られない．このような場合，系は初期位相の記憶を保ち続けると考えられる．

以上のように，第1原理（運動方程式）から運動論的方程式を導く際に重要なのは，7.2節で論じた位相の混合性の条件であることがわかった．これは，系の混合性という力学的性質が本質的であることを意味する．また，運動論的方程式 (7.77) は分布関数 $f(I,\theta,t)$ に対してではなく，(7.74) 式で定義された（粗視化された）分布関数 $F(I,t)$ に対して導かれたことにも留意すべきである．

7.4　フォノンの運動論的方程式

はじめに，I_{k_1}, I_{k_2}, …, I_{k_m} についての分布関数 $F(I, t)$ のモーメント $\langle I_{k_1}I_{k_2}\cdots I_{k_m}\rangle$ を次のように定義しよう，

$$\langle I_{k_1}I_{k_2}\cdots I_{k_m}\rangle = \int I_{k_1}I_{k_2}\cdots I_{k_m}\,F(I,t)\,d(I).$$

(7.77) 式に I_k を乗じたあと I_{k_1}, ${}_{k_2}$, …, I_{k_N} について積分すれば，モーメントに対する次の方程式が得られる，

$$\begin{aligned}\frac{d\langle I_k\rangle}{dt} = 18\pi\beta^2 \sum_{k_1,k_2,k_3} &\frac{|V_{k_1k_2-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\delta(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3})\\ &\times(\delta_{k_1,k}+\delta_{k_2,k}-\delta_{k_3,k})\,\delta_{k_1+k_2,k_3}\\ &\times(\langle I_{k_2}I_{k_3}\rangle+\langle I_{k_1}I_{k_3}\rangle-\langle I_{k_1}I_{k_2}\rangle).\end{aligned} \tag{7.78}$$

同様に，(7.77) 式に，$I_{k_1}I_{k_2}, I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}, \cdots$ を乗じたあと $I_{k_1}, I_{k_2}, \cdots, I_{k_N}$ について

積分することにより，無限に連鎖した方程式系が得られる．

物性論やプラズマの理論では，フォノンの運動論的方程式が役に立つ場合が多い．その場合の方程式は，次のように，2次のモーメントが1次のモーメントとの積になるという仮定のもとに（7.78）式から求められる，

$$\langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle = \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle, \quad k_1 \neq k_2. \tag{7.79}$$

この仮定（7.79）は，運動論的方程式を導く際にボルツマンによって使われた仮定と類似のものである．いまの場合，$\langle I_k \rangle$ は波数 k のフォノンの平均的な数に比例する．（7.79）式を（7.78）式に代入すれば，次の運動論的方程式が得られる，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle I_k \rangle}{\partial t} = 18\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2} \frac{|V_{k_1, k_2, -k}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_k} &[2(\langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle + \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle \\ &- \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle)\delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\delta_{k+k_1, k_2} - (\langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle \\ &+ \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle)\,\delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\,\delta_{k_1+k_2, k}].\end{aligned} \tag{7.80}$$

この（7.80）式の右辺はエントロピーを増大させる形になっており，この方程式はボルツマン方程式と類似の方程式である．

方程式（7.80）について本質的に大事な点は，この方程式が導かれるための条件にある．第1の条件は混合性の条件であり，第2の条件は相関が存在しない条件（7.79）である．一般に，これら2つの条件は互いに独立であると考えられている．

第7章に関する注釈

1. ウラム（Stanislaw Ulam）はこの研究を始める動機について次のように回想している．“第2次大戦後のある夏，フェルミはしばしばロスアラモスに姿を見せた．そのうち，彼は電子計算機の開発とその潜在能力に関心をもち始めた．彼は，計算機を利用して将来どのような問題が研究できるかということについて私とかなり議論した．そして，結局，私達は，解析的で厳密な解が知られていない問題で，その解の性質を知るうえで計算機による数値計算実験が相当の役割を演じると思われる課題を発見的研究として試みることにした．この試みは，非線型性をもつ物理系の——長時間または“広い領域”にわたる——漸近的性質の問題に対しては特に実りの多いものであった．加えて，計算機実験には，少なくても，問題の前提が明確に記述できるという利点があった．現実の物理系やモデルではこの点が必ずしもはっきりしていなかった，つまり，このような系では，全ての仮定が必ずしも確定できるとは限らなかったのである．

当時，フェルミはしばしば次のような彼の信念を述べていた，「将来の物理学の基礎理論は非線型の演算もしくは方程式を含むことになるであろう．したがって，非線型系の理

解のために必要な数学に修熟することは極めて優益であろう」. 私達のプランは，可能な限り簡単な物理的モデルから出発して，その長時間にわたる挙動を調べる，そして，その結果を分析した後に，問題の一般性と複雑性を徐々に増やしていく，……というものであった. こうして，純粋に運動学的な問題，たとえば，自由に結び目をつくれるように鎖状に連結された質点系が，外力を受けずに，回旋状のなめらかな面に拘束されて運動する問題を取り扱うようになった. これらの運動の研究は，混合性または“乱流”を現わす物理系の最終的なモデルを確定するための予備的研究になった. このときの動機は，混合性と“熱化過程”との比率を求めることであったが，その計算結果が将来の理論のための何かヒントを与えるであろうという希望的観測もあったのも事実である. また，敢えて言うならば，フェルミの以前からの関心事であったエルゴード理論が問題を選択するときの1つの動機になったという推測も成り立つ……” [120].

2.　本節と次節で述べることがらは，文献 [105], [13] および [14] に沿うものである.

3.　(7.30) 式を (7.32) 式に書き直すには，初期位相 $\varphi_{k,(0)}$ がもっと具体的に限定される必要がある. (7.32) 式を導くにあたって，位相 $\varphi_{k,(0)}$ が $\boldsymbol{k}$ のゆっくりした関数であることが暗黙のうちに仮定されている. しかし実際には，$\varphi_{k,(0)}$ が $\boldsymbol{k}$ に強く依存する場合もあれば，不規則に変化する場合もある (調和振動から他の振動へ遷移する場合). とくに後者の場合には特別な解析が必要になる. そのような解析は文献 [121] でなされている. また，さらに完全な形の解析が文献 [122] で行われている.

4.　ここに列挙した性質はある定理からの帰結ではない，言い換えると，定理から厳密に証明された性質ではない. これまで，我々はこれらの性質をもっている物理系を選んで取り扱ってきたに過ぎない. したがって，混合性の特性がこれらの性質をもたない“非典型的な”系の可能性も含めて議論できように論じるべきであったのかもしれない. たとえば，この可能性は，場の位相が乱雑な (外的) 要素を先験的に含むような場合に存在する [122].

8 章　非線型波動のストカスティシティ

周期的な非線型波動（以下では非線型波動と呼ぶ）は，散逸のない場合には，任意の非線型媒質で生じる．これは，速度 u で移動する周期的波動の特別な場合にあたり，媒質の変位が，形式的に，

$$y=y(x-ut)$$

の形で表わされる．水の表面で見られる非常に長い規則的な波動がこの種の運動のよい例である．

非線型波動は，力学系としてはかなり複雑な系であり，これは，幾つかの平面波の強い相互作用の結果として形成された波束とみなすこともできる．それ故，外的摂動の非線型波動への影響を調べる問題には，粒子軌道の摂動論には見られない多くの特殊な要素が内在する．

この章では，非線型共鳴とストカスティシティという概念を新しい力学系すなわち周期的非線型波動にまで適用できるように一般化することを考える（注釈 1 を参照）．

8. 1　非線型波動の定常運動

位相平面，特異性とソリトン，非線型分散，波の転倒，臨界速度，非線型波動のスペクトル．

周期的な非線型波動は，一定の方向に伝播する波動の特別な場合にあたっている．この事実を利用すると，波動の記述が割合に簡単になる．

問題を具体的にするために，非線型波動方程式を次の形にとろう，

$$y_{tt}=c^2y_{xx}+F(y), \qquad F(y)\equiv\frac{dV(y)}{dt}, \tag{8.1}$$

そして，次の形の進行波の解を考える，

$$y=y(\xi), \qquad \xi\equiv x-ut. \tag{8.2}$$

この場合，波動の速度 u は 1 つのパラメーターである．(8.1) 式と (8.2) 式から，次の方程式が得られる，

$$(c^2-u^2)y''+F(y)=0. \tag{8.3}$$

ただし，y'' は ξ の2階微分を意味する．方程式 (8.3) は，質量 (c^2-u^2) の非線型振動子がポテンシャル $V(y)$ の中で運動するときの運動方程式と等価である．このとき，エネルギー積分は

$$E=\frac{1}{2}(c^2-u^2)(y')^2+V(y) \tag{8.4}$$

で与えられる．エネルギー積分がわかったので，1.2節の議論と同様に，位相空間 (y, y') 上で解を幾種類かに分類できる．まず，物理的に意味のある解は値が有限であるから，位相平面上の閉軌道に対応する．また，特殊な解としては，エネルギー E_c をもち，双曲型特異点を通過する軌道がある．この軌道は，非線型波動が無限大の周期の波動 $y_c(x-ut)$ に縮退した場合に対応する．この波動による媒質の変位は弧立した山の形になるので，この種の波動は速度 u のソリトン（弧立波）と呼ばれる．ソリトンのよい例は津波である．

変数 ξ の定義式 (8.2) と (8.4) 式から，波動の空間的周期（波長）として，

$$\lambda=\sqrt{2(c^2-u^2)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{dy}{\sqrt{E-V(y)}}, \tag{8.5}$$

が与えられる．ただし，ξ_1 と ξ_2 は井戸形ポテンシャル $V(y)$ 内の転移点である．$k=2\pi/\lambda$ によって波数 k を導入すると，(8.5) 式は，この k が E と u の関数であること，つまり，

$$k=k(E,u), \tag{8.6}$$

となることを意味する．波数 k がエネルギー E に依存すること，すなわち，k が波動の振幅に依存することは，運動方程式 (8.3) の非線型性からの1つの帰結である．したがって，(8.6) 式は，波動の非線型な場合の分散則を表わす関係式であると考えられる．なお，$y\to 0$ の極限で，(8.6) 式は線型関係 $u=\omega/k$ に移行するものとする．

変数 (x,t) を1つの変数に変換することによって，問題は相当に簡単になったが，同時に，非線型波動についてのある種の情報も失う結果になった．変数 $\xi=x-ut$ を導入すると，パラメーター u が問題にもち込まれるために，新たな問題が発生する．つまりこの u の値を定める具体的な方法がわからないのである．このことを明確にするためには，媒質の物質に対するもとの方程式に立ち戻らなければならない．

例として，1.2節ですでに取り扱ったプラズマの非線型振動を考えよう．この

ときの振動を記述する方程式を全て書くと，次のようになる [23],

$$\rho_t+(\rho v)_x=0,$$
$$v_t+vv_x=\frac{e}{m}\Phi_x,$$
$$\Phi_{xx}=4\pi e(\rho-\rho_0). \tag{8.7}$$

ここで，ρ と v はそれぞれ媒質の密度と速度であり，Φ は場のスカラーポテンシャルである．(8.2) 式の形の解を仮定すると，(8.7) 式から次の関係式が得られる，

$$(v-u)\rho=-u\rho_0,$$
$$E=\frac{1}{2}(\varphi')^2-2\omega_0^2(2u\varphi^{1/2}-\varphi),$$
$$\varphi^{1/2}\equiv u-v,\quad \omega_0^2\equiv\frac{4\pi e^2\rho_0}{m}. \tag{8.8}$$

(8.8) 式のエネルギー積分と (1.19) 式を比較すれば，後者で $u=1$ にとってある点を除けば，両者は一致していることがわかる．

$E=0$ の場合，(8.8) 式の解の中に点 $\varphi=0$ を通る軌道がある．この点では，v の値は u になり，密度 ρ が無限大になる．この現象は非線型波動の転倒と言われる．一般に，方程式系 (8.8) の解は多価関数になるので，方程式系 (8.8) だけから一意的な結論を出すわけにいかない．特に，$E=0$ における特異性は，エネルギー積分の分析から予想されるよりもはるかに複雑になる．

ソリトンの存在と波動の転倒の二つの特異性をもつ他の例として，イオン波のプラズマ振動モデルを考えてみよう．これは次の方程式系で記述される，

$$\rho_t+(\rho v)_x=0,$$
$$v_t+vv_x=-\frac{e}{M}\Phi_x,$$
$$\Phi_{xx}=-4\pi\left(\rho-\rho_0\exp\frac{e\Phi}{T_e}\right). \tag{8.9}$$

ここで，ρ, v, M はそれぞれイオンの密度，速度，質量であり，また，T_e は電子の温度を表わす．(8.2) 式の形の解を仮定すると，方程式 (8.9) のエネルギー積分は，

$$2E=(u-v)^2(v')^2+1+uv-e^{uv-v^2/2}$$

となる．ただし，ここで，デバイ半径，

$$r_d=(T_e/4\pi e^2\rho_0)^{1/2}$$

とイオン音波の速度，

$$c=(T_e/M)^{1/2}$$

の2個の定数を1にとった．図8.1は，u＝定数で，E にいろいろな値を与えたときの位相軌道を（v, v'）平面に描いたものである．$E=0$ の場合，解は，ある範囲の値の u に対してソリトン型になる．一方，図8.2は，E＝定数で，u にいろいろな値を与えたときの位相軌道を示す．図8.2から，周期的な解が存在するように E の値を固定しても，変量 u がある臨界値 u_c をもつことがわかる．この臨界値 u_c のところは波動の転倒に対応する．u_c の値は E の値に依存する．とくに，E が小さい場合には，u_c は約1.6である．

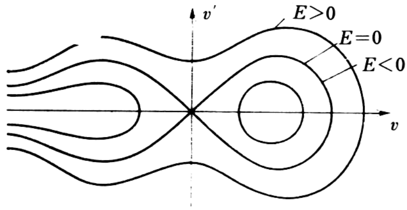


図 8.1 u＝定数の場合のイオンの波の振動の位相平面

ところで，(8.2) 式の形の周期解は一般に次のようにフーリエ分解できる，

$$y(x-ut)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ink(x-ut)}. \tag{8.10}$$

n の関数としての係数 a_n は波動のスペクトルと考えてよい．近似的に線型の場合には，振幅 a_n は，n が大きくなると，急速に減少する．したがって，その場合，展開式 (8.10) の始めの数個の項のみを考慮に入れるだけで充分である．

また，(8.2) 式の形の非線型波動の解は一組の常微分方程式によって記述することができる．それ故，そのような解を分析することは，あるハミルトニアンで規定される非線型振動の性質を調べる問題に帰着する．1.2節の議論と同様に，波動スペクトル中の調和振動 a_n の数を特徴づけるパラメーター N を導入できる．これは，$n<N$ の場合の a_n は急速に減少することはないけれども，$n>N$ の場合の a_n が指数関数的に減少することを意味する．これまでの例では，このような意味をもつ N の値を何等かの方法で定めることが可能であった．さらに，N の値は非線型波動の非線型性の強さを表わす目安でもあった．1.2節で，1つの非線型波動は，N 個程度の振動数 $n\omega(1<n\leq N)$ の調和振動が強く相互作用している系であると解釈した．同様に，周期的な非線型波動は，N 個の同一位相速度の平面波が互に強く相互作用している系であるとみなす

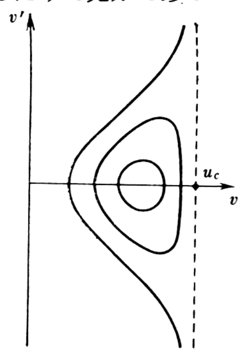


図 8.2 E＝定数の場合のイオンの波の振動の位相平面

ことができる．後にこの描像が用いられるであろう．

8. 2 非線型波動と摂動

フーリエ成分に対する方程式．ハミルトニアン．正準運動方程式．ポアソン括弧．

非線型波動の時間発展の記述には幾つかの方法があるが，そのいずれの方法もそれぞれ問題の特質を反映している．ある種の非線型波動は，平面波が互いに強く相互作用している波束として記述できることはすでに述べた．その場合，非常に弱い摂動が作用しても，その波束は崩壊しないことが仮定されている．また，波束は時間的にも空間的にも幾何学的型態を変えながら発展するが，その変化も，非線型波動全体を特徴づけるパラメーターのわずかなまたはゆっくりした変化として記述できるということが前提になっている．このような記述法にかわる方法が有るとすれば，それは，波束を構成する個々の平面波そのものの変化を考慮に入れるものであろう．

以下の各節では，周期的な非線型波動に対する波動のなまの影響を考察する．この節では，その考察の準備として，それに適したハミルトニアン形式の概要を述べておく．

まず，運動方程式を次の形にとろう，

$$y_{tt}=c^2y_{xx}+F(y)+\varepsilon\Phi(y,x,t). \tag{8.11}$$

ここで，Φ は摂動を表わし，ε は無次元の小さな摂動のパラメーターである．境界条件としては，解が x について周期的であるという条件，

$$y(x+\lambda,t)=y(x,t), \tag{8.12}$$

をとる．また，摂動も x について周期的である，つまり，

$$\Phi\,(y\,(x+\lambda),\ x+\lambda,t)=\Phi\,(y,x,t), \tag{8.13}$$

であるとする．このとき，y はフーリエ展開，

$$y(x,t)=\sum_n y_ne^{inkx},\quad y_{-n}=y_n^*. \tag{8.14}$$

で表わされる．ただし，k は $k=2\pi/\lambda$ である．同様に，力 $F(y)$ と摂動 $\Phi(y,x,t)$ も次のようにフーリエ展開できるとする，

$$F(y)=\sum_n F_ne^{inkx},\quad F_{-n}=F_n^*,$$

$$\Phi=(y,x,t)=\sum_n \Phi_n e^{inkx},\quad \Phi_{-n}=\Phi_n^*.$$

$F(y)$ が1つの級数に展開できることは次の様な意味がある．いま，$F(y)$ を y のべき級数に展開して，

$$F(y)=\sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)} y^k,$$

であったとすると，この式の展開係数 $F^{(k)}$ と元のフーリエ展開式の係数 F_n との間に，

$$F_n=F^{(0)}\delta_{n,0}+F^{(1)}y_n+F^{(2)}\sum_{n_1,n_2} y_{n1}y_{n2}\delta(n-n_1-n_2)$$
$$+F^{(3)}\sum_{n_1,n_2,n_3} y_{n1}y_{n2}y_{n3}\,\delta\,(n-n_1-n_2-n_3)+\cdots, \tag{8.15}$$

という関係式が成り立つ．摂動 $\Phi(y,x,t)$ の展開係数について同じことが言える．

上述のフーリエ展開式を用いると，方程式（8.11）は次の無限個の方程式系に書き換えられる，

$$\ddot{y}_n+n^2k^2c^2y_n-F_n=\varepsilon\Phi_n. \tag{8.16}$$

とくに，摂動がない（$\varepsilon=0$）場合を考えると，（8.16）式は，

$$\ddot{y}_n+n^2k^2c^2y_n-F_n=0, \tag{8.17}$$

となる．この方程式は別の形に書くこともできる．実際に，もしも，解として（8.2）式のように速度 u で伝播する非線型波動のみを考えるならば，展開式（8.14）は，

$$y(x,t)=\sum_n a_n e^{ink(x-ut)}, \tag{8.18}$$

の形をとる，つまり，展開係数 y_n が，

$$y_n=a_n e^{-inkut}, \tag{8.19}$$

となる．それ故，

$$\ddot{y}_n=-n^2k^2u^2y_n, \tag{8.20}$$

が成り立つ，これを（8.17）式に代入すると，（8.17）式は次の関係式に書き換えられる，

$$u^2=c^2-\frac{1}{n^2k^2}\frac{F_n}{a_n}. \tag{8.21}$$

これは，分散関係（8.6）の1つの表現である（このとき，明らかに，$F_n/(a_n n^2)$ は n に依存しない）．

さて，運動方程式（8.11）をハミルトニアン形式に書き直すことが本節の主な目的であるが，それには種々の方法がある．なかでも，（8.16）式を粒子の運動方程式とみなす立場に立つ方法が最も簡単である．この立場に立つと，ハミルト

ニアンは次の形になる，

$$H=\frac{1}{2}\sum_n(\dot{y}_n\dot{y}_{-n}+n^2k^2c^2y_ny_{-n})+V[y]+\varepsilon\Psi[y;x,t]. \qquad (8.22)$$

ただし，$V[y]$ と $\Psi[y;\ x,t]$ は以下のようにして作られる y_n の汎関数である.

まず，力 $F(y)$ と摂動 $\Phi(y,x,t)$ の“ポテンシャル” $V(y)$ と $\Psi(y;\ x,t)$ を次式によって導入しよう，

$$\frac{dV(y)}{dy}=F(y),\quad \frac{d\Psi(y,x,t)}{dy}=\Phi(y;\ x,t).$$

次に，これら“ポテンシャル”を y のべき級数に展開すると，

$$V(y)=\sum_{k=0}^{\infty}V^{(k)}y^k,$$

$$\Psi(y;x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi^{(k)}(x,t)y^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_n\Psi_n^k(t)e^{inkx}y^k. \qquad (8.23)$$

になったとする．このとき，$V[y]$ と $\Psi[y;x,t]$ は次のように作られる，

$$V[y]=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}dx\,V(y),\qquad \Psi[y;x,t]=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}dx\,\Psi(y;x,t). \qquad (8.24)$$

ただし，上式の被積分関数の中の y にはこれのフーリエ展開式 (8.14) を代入するものとする．(8.23) 式を考慮すると，簡単な計算によって，$V[y]$ と $\Psi[y;\ x,t]$ を次のように表わすことができる.

$$V[y]=\sum_{k=0}^{\infty}V^{(k)}\sum_{n_1,n_2\cdots,n_k}y_{n_1}y_{n_2}\cdots y_{n_k}\,\delta(n_1+n_2+\cdots+n_k),$$

$$\Psi[y;\ x,t]=\sum_n\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_n^{(k)}(t)\sum_{n_1,n_2,\cdots,nn_k}y_{n_1}y_{n_2}\cdots y_{n_k}\,\delta(n+n_1+n_2+\cdots+n_k). \quad (8.25)$$

$V(y)$ の展開係数 $V^{(k)}$ と $F(y)$ の展開係数 $F^{(k)}$ との間に，

$$F^{(k-1)}=kV^{(k)}$$

の関係があることは $V(y)$ の定義式から明らかである.

(8.25) 式で与えられる $V[y]$ と $\Psi[y;\ x,t]$ を用いて，ハミルトニアンを (8.22) 式の形に書くことができたのは，本質的には境界条件 (8.13) を利用したからである．このハミルトニアンは，また，次のように摂動項を分離して書くこともできる，

$$H=H_0+H_1,\quad H_1=\varepsilon\Psi.$$

ハミルトニアン (8.22) を用いると，運動方程式 (8.16) は次のハミルトニア

ン形式に書ける．

$$\frac{d}{dt}\dot{y}_n = -\frac{\partial H}{\partial y_{-n}}, \quad \frac{d}{dt}y_n = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-n}}. \tag{8.26}$$

方程式（8.26）は，連続スペクトルの場合にも適用するように一般化することが可能であるが，ここでは，その議論はしない．

$Q(y)$ を y の任意の関数とし，$Q \equiv Q[y]$ を上述の $V[y]$ と同じく成分 y_n の汎関数であるとすれば，$Q(y)$ の時間発展は，

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \sum_n \left(\frac{\partial Q}{\partial y_n}\dot{y}_n + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}_n}\ddot{y}_k\right) \\ &= \sum_n \left(\frac{\partial Q}{\partial y_n}\frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-n}} - \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}_n}\frac{\partial H}{\partial y_{-n}}\right) \\ &= [Q, H]\end{aligned} \tag{8.27}$$

で与えられる．ここで，最後の式はポアソン括弧〔,〕の定義式である．

以上で述べた関係式と方程式は後の節で周期的な非線型波動を解析するときの有効な数学的手段になるだろう．

8.3　非線型共鳴

打ち切られた方程式系，非線型共鳴，波動パラメーターの変調，摂動の空間構造による影響．

一般的な非線型波動を解析することは極めて困難である．しかし，ある特別な条件のもとでは，割合に簡単な処法で物理的に自明ではない結論を導くことができる．この節では，そのとき使われる近似の定性的な検討から始めることにしよう．

8.1 節の最後の所で，周期的非線型波動は N 個の互いに強く相互作用する平面波の波束として取り扱えることを述べた．これらの平面波の振幅 $\boldsymbol{a}_n$ の間には強い相関が存在する．相関が存在するということは，形式的には，$\boldsymbol{a}_n$ が2つのパラメーター，H_0 と $\boldsymbol{k}$ の関数であることを意味する．以下では，波動の非線型性が非常に強い場合，すなわち，

$$N \gg 1 \tag{8.28}$$

の場合を考える．この条件のもとでは，小さな摂動は，波動のエネルギー E と $H_0 = H_0(E)$ にわずかな変化をもたらすにすぎない．同じく，波動の速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

(H_0, k) もわずかな変化をうけるだけである．一般に，波動のスペクトル構造と N の値も大きな影響を受けないことが期待される．これらは全て，不等式（8.28）から予想されることである．ところで，波動のスペクトルを構成する調和振動が互いに強く結合（相互作用）している事実から，小さな摂動ではこの結合は破られないということが言える．これが，以下で議論する近似の定性的な側面である．次に，その形式的な側面を調べよう（注釈2を参照）．

無摂動のときの運動として，1つの周期的非線型波動があるとすると，この運動に対しては，（8.17）式から（8.21）式までの関係式がそのまま成立する．この運動に対応するハミルトニアンは H_0 である．これに摂動が作用する場合の（8.22）式の解を，

$$y(x,t)=\sum_n y_n e^{inkx}=\sum_n a_n{}^{in(kx-\theta)},$$
$$y_n\equiv a_n e^{-in\theta}, \tag{8.29}$$

の形に置こう．この級数展開には境界条件（8.12）が考慮されている．第0近似（$\varepsilon=0$）では，（8.19）式と（8.27）式によって，次式が成り立つ，

$$\dot{H}_0=0, \quad \dot{\theta}=ku(H_0)=\omega(H_0). \tag{8.30}$$

摂動が作用する場合には，（8.27）式に対応して，

$$\begin{aligned}\dot{H}_0&=[H_0,H]=[H_0,H_1]=\varepsilon[H_0,\Psi]\\&=\varepsilon\sum_n\left(\frac{\partial H_0}{\partial y_n}\frac{\partial\Psi[y;x,t]}{\partial\dot{y}_{-n}}-\frac{\partial H_0}{\partial\dot{y}_n}\frac{\partial\Psi[y;x,t]}{\partial y_{-n}}\right),\end{aligned} \tag{8.31}$$

が成り立つ．もしも，摂動項が“速度”（つまり，$\dot{y}$）に依存しなければ，（8.31）式は次のように簡単になる，

$$\dot{H}_0=-\varepsilon\sum_n\dot{y}_{-n}\frac{\partial\Psi[y;x,t]}{\partial y_{-n}}=-\varepsilon\sum_n y_n\frac{\partial\Psi[y;x,t]}{\partial y_n}. \tag{8.32}$$

この（8.32）式は正確であるが，これを直接用いて，位相 θ の方程式を求めることは困難である．そこで，（8.30）式と（8.32）式からわかるように，θ の方程式が，

$$\dot{\theta}=\omega(H_0)+O(\varepsilon) \tag{8.33}$$

の形であることに注意して，この方程式の性質を簡単に調べてみよう．ω が極端に0に近い値でなければは，ω は摂動によって，

$$\Delta\omega=\left|\frac{d\omega}{dH_0}\right|\Delta H. \tag{8.34}$$

程度の変化をうける．これは，（8.33）式の第2項と同程度の大きさ，つまり，ε のオーダーの量の筈である．実際に，（8.32）式によると，$\Delta H/H$ は，例外的な

場合を除けば，ε のオーダーの大きさである．それ故，確かに，(8.33) 式の第2項と (8.34) 式は共に ε のオーダーの量になる．

(8.32) 式の摂動項が，共鳴分母を含む共鳴項である場合には，事情が違ってきて，ΔH は実質的に大きくなる．非線型共鳴の場合（第1.3節を参照）には，$\Delta H \sim \varepsilon^{1/2}$ となり，θ の方程式は次の打ち切られた方程式で記述できる．

$$\dot{\theta}=\omega(H_0(t)).$$

摂動が非線型波動と共鳴する場合も，これと同じになることを以下で示そう．

簡単のために，ハミルトニアン (2.11) の Φ が y に依存しない場合を考えると，Φ は，

$$\Phi(x,y)=\sum_n \Phi_n(t)e^{iknx},$$

と展開でき，$\Psi[y;\ x,t]$ が，(8.23) 式と (8.24) 式によって，

$$\Psi\,[y;\ x,t]=\sum_{n,n_1}\Phi_n(t)y_{n_1}(t)\,\delta(n+n_1),$$

と表わせる．この関係式の y_n に無摂動の場合の値 (8.29) を代入した後，さらにその結果を (8.32) 式に代入すると，

$$\dot{H}_0=i\varepsilon\omega(H_0)\sum_n na_n(H_0)e^{-in\theta}\Phi_{-n}(t),$$
$$\dot{\theta}=\omega(H_0) \tag{8.35}$$

が得られる．この方程式系は，非線型波動の時間発展を記述し，形式的には閉じている．いま，摂動が振動数 ν の周期関数であるとすると，$\Phi_n(t)$ も次のように展開できる，

$$\Phi_n(t)=\sum_l \Phi_{n,l}\,e^{-il\nu t}. \tag{8.36}$$

もしも，1組の整数 (n,l) に対して，

$$n\omega(H_r)-l\nu=0 \tag{8.37}$$

が満たされるならば，$H_0=H_r$ で共鳴が生じることが (8.35) 式と (8.36) 式からわかる．(8.37) 式を満たす H_r の値 $H_0^{(n,l)}$ は1組の整数 (n,l) ごとに一般的に存在する．

非線型波動と摂動の共鳴を取り扱う第1段階として，はじめに1.3節の議論と同じく，孤立した共鳴の場合を考える．孤立した共鳴というのは，(8.35) 式の総和式で $H_0=H_r$ の1つの共鳴項のみが支配的であり，他の項は無視できることを意味する．記号の簡素化のために，H_0 につけた添字0を省いて (8.35) 式を書くと，

$$\dot{I}=\varepsilon\Upsilon\cos\phi,$$

$$\dot{\psi}=n\omega(I)-l\nu, \tag{8.38}$$

となる．ただし，上式では次の記号が使われている．

$$\omega(I)=\omega(H(I))=\frac{dH}{dI},$$

$$\Upsilon\equiv 2n|a_n||\Phi_n|. \tag{8.39}$$

方程式（38.8）は，共鳴〔(8.37) 式〕の近傍の“作用”（I）と位相（ψ）の変化を記述している．この方程式からわかるように，I の相対的変化量 $\Delta I/I$ は小さい．それ故，(8.39) 式で導入した Υ については $\Upsilon\approx$定数$=\Upsilon(I_r)$ であると考え，また，$\omega(I)$ については次の展開式を考える，

$$\omega(I)\approx\omega(I_r)+\frac{d\omega(I_r)}{dI}(I-I_r),$$

$$H(I_r)=H_r.$$

この展開式を（8.38）式に代入して，共鳴条件 $n\omega(I_r)-l\nu=0$ に留意すると，

$$\frac{1}{2}n\frac{d\omega(I_r)}{dI}(I-I_r)^2-\varepsilon\Upsilon\sin\psi\equiv\mathscr{H}, \tag{8.40}$$

が（8.38）式の第 1 積分であることが示される．この $\mathscr{H}$ が，（$I-I_r$, ψ）を正準変数ととみなしたときの非線型共鳴を記述する有効ハミルトニアンである．表式 (8.40) は 1.3 節の (1.29) 式と一致していることに注意しよう．したがって，これから先の解析も第 1.3 節の場合と全く同じになる．

有効ハミルトニアン（8.40）からわかるように，$\Delta I=I-I_r$ と ψ は時間的に振動する．また，この振動は波動のパラメーターに周期的な変調をもたらす．作用変数の共鳴幅は（1.33）式と同様に，

$$\max\Delta I=\left(\frac{4\varepsilon\Upsilon}{n|\omega'(I_r)|}\right)^{1/2}, \tag{8.41}$$

で与えられる．非線型波動のフーリエ振幅 a_n は変数 I のみの関数であり，

$$a_n(I)=a_n(I_r)+\frac{da_n(I_r)}{dI}\Delta I, \tag{8.42}$$

と展開できるので，ΔI とともに周期的に変動する．同様に，波動の速度 u も，

$$u=\frac{1}{k}\omega(I)=\frac{1}{k}[\omega(I_r)+\omega'(I_r)\Delta I], \tag{8.43}$$

であるから，周期的に変動する．

このように，非線型波動と摂動が相互作用すると，有限の特別な波動状態が形成される．この相互作用は，第 1 近似では，波動そのものを破壊するまでには到らないが，波動のパラメーターの周期的変調をひきおこす．(8.40) 式と (8.41)

式から，振動数（位相の振動数）の最大変調は，

$$\Omega=|\omega'(I_r)|\max \Delta I=\left(\frac{4\varepsilon\Upsilon}{n}|\omega'(I_r)|\right)^{1/2}, \tag{8.44}$$

と評価される．この（8.44）式を用いて（8.43）式を評価すると，波動の速度の最大変調が，

$$\begin{aligned}\max \Delta u&=\max[u(I)-u(I_r)]\\&=\frac{\Omega}{k},\end{aligned} \tag{8.45}$$

と表わされる．表式（8.41），（8.44）および（8.45）の共鳴の幅は全て外的な摂動の空間スペクトル Φ_n に依存している．相互作用の過程で，共鳴条件（8.37）が波動のなかから n 番目の調和振動を選択した結果，摂動の効果を表わす表式（8.39）にその n 番目の振幅 a_n が現われている．$n>N$ のときは，a_n が指数関数的に小さくなるので（8.1節を参照），このときの共鳴の幅も実質的に小さくなる．その物理的理由は次のように考えられる．いまの場合，非線型波動の山の幅（すなわち，ソリトンの幅）は，

$$\delta_s\approx\frac{1}{kN}=\frac{\lambda}{2\pi N},$$

の程度である．$n>N$ であることは，摂動の成分 Φ_n の波長 $2\pi/nk$ が，非線型波動の山の幅（ソリトンの幅）よりも小さいことを意味する．したがって，$n>N$ であるときの摂動はスケールの小さなものになり，波動全体に平均すると，わずかな効果しかおよぼさないと考えられる．

8. 4　非線型波動のストカスティック不安定性

共鳴の間隔，ストカスティシティのための条件，作用－角変数，非線型波動の拡散方程式．

方程式（8.35）に戻り，展開式（8.36）を用いて，それを次のように書き換える，

$$\dot{H}=-i\varepsilon\omega(H)\sum_n na_n(H)\sum_l \Phi_{-n,-l}\,e^{i(n\theta-l\nu t)}. \tag{8.46}$$

ここでは，記号の簡素化のため，H につけた添字0を省略した．前の節では，

$$n\omega(I_r)=l\nu$$

を満たす孤立した共鳴について考察した〔H から I への変数変換は（8.39）式に

よって行われるとする〕．多重共鳴という一般的な場合には，共鳴の重複のために，現象がストカスティックになる．形式的な立場から言えば，(8.46) 式の問題と外場の中の振動子の問題の間には本質的な違いはない．違いがあるとすれば，(8.46) 式の右辺が特殊な構造をもっている点だけである．

共鳴条件を満たす I の値を $I_{n,l}$ と書くことにする，つまり，共鳴条件を

$$n\omega(I_{n,l})=l\nu \tag{8.47}$$

と書く．この (8.47) 式で表わされる共鳴に最も近い隣りの共鳴は，条件，

$$(n\pm1)\omega(I_{n\pm1,l})=l\nu \tag{8.48}$$

あるいは，条件

$$n\omega(I_{n,l\pm1})=(l\pm1)\nu \tag{8.49}$$

によって表わされる．

共鳴の間隔 $\delta\omega$ は，$\omega(I_{n,l})$ と $\omega(I_{n\pm\alpha,l\pm\beta})$ ($\alpha=0,1$; $\beta=0,1$) との差であり，

$$\begin{aligned}&\delta\omega_{\alpha\beta}=|\omega(I_{n\pm\alpha,l\pm\beta})-\omega(I_{n,l})|,\\&\alpha=0,1,\ \ \beta=0,1.\end{aligned} \tag{8.50}$$

で定義される．条件 (8.48) 式の場合は，$\alpha=1$，$\beta=0$ に対応して，

$$\begin{aligned}\delta\omega_{10}&=\left(\frac{l}{n}-\frac{l}{n+1}\right)\nu\approx\frac{l}{n^2}\nu\\&=\frac{\omega^2}{l\nu}=\frac{\omega}{n}\end{aligned} \tag{8.51}$$

が成り立つ．また，条件 (8.49) 式の場合は，$\alpha=0$，$\beta=1$ に対応して，

$$\delta\omega_{01}=\frac{\nu}{n}=\frac{\omega}{l} \tag{8.52}$$

が成り立つ．n が大きいときには，$\alpha=1$，$\beta=1$ の場合が意味をもつようになる．実際にこの場合，

$$\delta\omega_{11}=\left|\frac{l}{n}-\frac{l+1}{n+1}\right|\nu\approx\frac{|n-l|}{n^2}\nu, \tag{8.53}$$

となり，もしも，n と l がともに1よりも大きく，かつ，$|n-l|\approx1$ となるときには，$\delta\omega_{11}$ が $\delta\omega_{10}$ と $\delta\omega_{01}$ よりも小さくなることが (8.51) 式および (8.52) 式と (8.53) 式との比較によって確かめられる．

さて，ストカスティシティのための条件は，共鳴が重複する条件として，

$$K=\left(\frac{\Delta\omega}{\min\delta\omega}\right)^2\gtrsim1, \tag{8.54}$$

と書くことができる．ただし，$\Delta\omega=\Omega$ は，(8.44) 式で与えられる共鳴の幅であ

る．(8.39) 式と (8.44) 式および (8.51)〜(8.53) 式を (8.54) 式に代入すると，次の3つの場合の条件が得られる，

$$K_{10}=\frac{8\varepsilon\pi^2|a_n\Phi_{nl}\omega'|}{\omega^2}\gtrsim 1,\quad n\gg 1,\quad l\approx 1,$$

$$K_{01}=\frac{8\varepsilon\pi^2|a_n\Phi_{nl}\omega'|}{\nu}\gtrsim 1,\quad n\approx 1,\quad l\gg 1,$$

$$K_{11}=\frac{8\varepsilon n^4|a_n\Phi_{nl}\omega'|}{|n-l|^2\nu^2}\gtrsim 1,\quad n,l\gg 1,\quad |n-l|\approx 1. \tag{8.55}$$

これらの条件のいずれか1つが満たされれば，波動の位相〔(8.29) 式をみよ〕が乱雑な関数になり，また，その相関は時間の経過とともに指数関数的に減少する．このとき，非線型波動は乱雑な波動になり，その時間発展は運動論的方程式によって記述される．その運動論的方程式を得るためには，まず，変数 (I,θ) が実際に互いに正準共役な変数になっていることを確かめておく必要がある．

これを見るために，摂動をうけている波動のハミルトニアンを，

$$H=H_0[y,\dot{y}]+\varepsilon\Psi[y;x,t], \tag{8.56}$$

と置こう．前節と同様に，$\Psi[y;x,t]$ が

$$\Psi[y;x,t]=\sum_n y_n\Phi_{-n},$$

で与えられる場合を考える．I の定義式 (8.39) と y のフーリエ展開式 (8.29) を用いて，ハミルトニアン (8.56) を次のように書き換えよう，

$$H=H_0(I)+\varepsilon\sum_n a_n(I)e^{in\theta}\Phi_{-n}(t). \tag{8.57}$$

この (8.57) 式から，次の形式的な関係が導かれる，

$$\dot{I}=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-i\varepsilon\sum_n na_n(I)e^{in\theta}\Phi_{-n}(t),$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I)+\varepsilon\sum_n\frac{da_n(I)}{dI}e^{in\theta}\Phi_{-n}(t). \tag{8.58}$$

上記の I の方程式は (8.35) 式の初めの方程式と等価である．(8.58) 式の右辺を直接微分することによって，等式，

$$\frac{\partial\dot{I}}{\partial I}=-\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}$$

が成り立つことが確かめられる．この等式は，(8.57) 式の形のハミルトニアンに対して2つの変数 (I,θ) が互いに正準共役な変数であることを意味する．

こうして，位相 θ の時間発展がストカスティックであり，変数 (I,θ) が正準変数であることが確認されたので，運動論的方程式を書き下す準備は整った．乱雑な位相 θ について平均化した分布関数 $f(I,t)$ を考え，この分布関数に対する

フォッカープランク型方程式を書けば，

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}D(I)\frac{\partial f}{\partial I} \tag{8.59}$$

となる．ここで，$D(I)$ は次の拡散係数の標準的な表式で与えられる，

$$D(I)=\frac{1}{t_0}\langle\!\langle[I(t_0)-I(0)]^2\rangle\!\rangle. \tag{8.60}$$

ただし，二重括弧《…》は以前のときと同じく位相についての平均操作を表わし，また，時間 t_0 としては，位相の相関の消滅時間より長く，かつ，拡散時間よりは短い時間を考える．(8.58) 式から $I(t_0)$ を評価して，その結果を (8.60) 式に代入すると，D に対する次の表式が得られる，

$$D=-\varepsilon^2\sum_{n_1,n_2}n_1n_2a_{n_1}a_{n_2}\frac{1}{t_0}\int^{t_0}dt_1\int^{t_0}dt_2\Phi_{n_1}(t_1)\Phi_{n_2}(t_2)$$
$$\times\langle\!\langle e^{i[n_1\theta(t_1)+n_2\theta(t_2)]}\rangle\!\rangle. \tag{8.61}$$

さらに，$\Phi_n(t)$ の展開式 (8.36) を用いて (8.61) 式の積分を実行し，そして，t_0 について最も次数の高い項のみを残すと，次式が導かれる，

$$D\approx\pi\varepsilon^2\sum_n n^2|a_n(I)|^2\sum_l|\Phi_{nl}|^2\delta(n\omega-l\nu). \tag{8.62}$$

この (8.62) 式と非線型振動子のときの (8.35) 式を比較すると，これらの間には大きな違いのないことがわかる．

最後に，方程式 (8.59) は，波動のエネルギーまたは振幅などの波動のパラメーターが周期的な摂動によってゆっくり拡散する過程をも記述していることを見ておこう．

非線型波動の全体的な振幅が $a(I)$ である場合，一般に，a_n は，$n\ll N$ ならば，

$$a_n\approx\frac{a(I)}{N}\left(\frac{n}{N}\right)^{\gamma},$$

で与えられ，また，$n\gg N$ ならば，

$$a_n\approx\exp\left(-\frac{n}{N}\right),$$

で与えられる〔たとえば，コルトベーク－ドフリース (Korteweg-de Vries) 方程式の解の場合には，$\gamma=0$ である〕．

これと，さらに，簡単のために，いまの l の範囲では (8.62) 式の $\phi_{n,l}$ は近似的に定数であることを仮定すると，D は次のように評価される，

$$D\approx\pi\varepsilon^2a^2(I)\Phi_0^2\frac{1}{N^2}\sum_n n^2\left(\frac{n}{N}\right)^{2\gamma}\frac{1}{\delta\omega}.$$

ただし，Φ_0 は $\phi_{n,l}$ の代表的な値である．$\delta\omega$ として，たとえば，(8.52) 式の $\delta\omega_{01}$ を用いると，

$$D \approx \pi^2 \varepsilon^2 a^2(I) \Phi_0^2 \frac{N^2}{\nu}, \tag{8.63}$$

となる．一般に N は I の関数であるために，エネルギー H（または作用変数 I）の時間発展を記述する問題は方程式 (8.59) と (8.63) 式を両立させて初めて閉じた問題になる．

現実的な問題では，H, ω および N などが次のように振幅 a のべき関数で関数づけられる場合が多い，

$$H \sim k a^{\gamma_1}, \quad \omega \sim k a^{\gamma_2}, \quad N \sim \frac{1}{k} a^{\gamma_3}. \tag{8.64}$$

I の定義式 (8.39) と上記の関係式 (8.64) から，次の関係式が得られる，

$$I \sim a^{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad a \sim I^{1/(\gamma_1 - \gamma_2)}. \tag{8.65}$$

(8.64) 式と (8.65) 式を (8.63) 式に代入すれば，波動の拡散係数 D に対する表式が最終的に次式で与えられる，

$$D \sim \frac{\pi \varepsilon^2 \Phi_0^2}{\nu k^2} I^{2(1+\gamma_3)/(\gamma_1 - \gamma_2)}. \tag{8.66}$$

D として上式を用いると，波動の発展方程式 (8.59) は，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D_0}{k^2} \frac{\partial}{\partial I} I^{2(1+\gamma_3)/(\gamma_1 - \gamma_2)} \frac{\partial f}{\partial I},$$

$$D_0 \equiv \frac{\pi \varepsilon^2 \Phi_0^2}{2\nu}. \tag{8.67}$$

の形となる．この (8.67) 式を用いて

$$\langle I \rangle \equiv \int_0^\infty dI f(I,t) I$$

を計算すると，次の関係が得られる，

$$\langle I \rangle \sim \frac{1}{k^2} t^{(\gamma_1 - \gamma_2)/2(\gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_3 - 1)}. \tag{8.68}$$

さらに，関係式 (8.64) 式と (8.65) 式から H と I の関係を求めて，その結果と (8.68) 式を比較すると，最終的に次の関係式が導かれる，

$$\langle H \rangle \sim k^{(\gamma_1 + \gamma_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)} \, t^{\gamma_1 / 2(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - 1)}. \tag{8.69}$$

この関係式 (8.69) は，波動の平均エネルギーが増加する様子を表わすだけでなく，波動のスペクトル（波数 k の指数）をも決定する．

第8章に関する注釈

1. 非線型問題の精力的な研究の結果，非線型波動方程式を逆散乱の方法を用いて解くという新しい解法が開発された．この種の研究はガードナー（C.S. Gardner）達の有名な論文[124]にはじまる．逆散乱の方法によると，多くの非線型波動方程式のコーシー問題の厳密解を求めることが可能になる，そして，これらの解は媒質の規則的（非ストカスティック）運動を記述する．このことは広い範囲のよく知られた（典型的）非線型波動方程式について言える．しかし，現実の物理的世界では，もっとはるかに豊富な現象が見られる，すなわち，種々の乱流運動，分岐現象などである．本章では，このようなストカスティック（乱流的）運動をひきおこすモデルとして非線型波動を取り扱う．

非線型媒質と非線型波動の多くの例は，文献［126, 127］に見られる．また，文献［16］では，非線型波動でのストカスティシティの発生に関連した現象が論じられている．

2. 以下の分析は文献［128］でなされている議論に沿うものである．幾つかの非線型波動の共鳴相互作用を調べるための文献［129, 130］で使われている方法も以下の分析方法と同じである．

9 章　量子系におけるストカスティシティ非定常問題（その 1）

この章と後の 3 つの章は量子論的な力学系の分析にあてられる．古典力学系で見られたと同じように，（不規則な力やパラメーターが無い場合に）量子論の方程式も“カオス”を生成するであろうか？　このように表現された質問は，一見したところ，筋が通っており，受け入れられるように思われるかもしれないが，実のところ，この質問の内容は極めて曖昧である．その曖昧さの原因は，古典系のストカスティシティの分析で本質的な役割を果たした多くの力学的諸概念が量子力学系においては無意味になることにある．古典論的条件が近似的に満たされている場合，対応原理によれば，量子力学の結論は古典力学の結論から大きく離れたものにはならない筈である．これらと後で述べることを考え合せると，量子力学における“カオス”あるいはストカスティシティの発生の問題を取り扱うためには，問題自体を量子論の言葉で厳密に定式化しなければならないことがわかる．

しかし，その前に，ストカスティシティの古典的議論で用いられた諸概念を再検討する必要がある．また，それらを量子論的に考え直す際に遭遇する困難についてその概要を知っておく必要があろう．

9. 1　量子論的 *K* 系

古典系と量子系との比較，安定性問題，運動の積分と可積分性の問題，準古典近似の特性，量子論的 *K* 系と問題の設定．

古典系のストカスティシティに関する研究はつぎの二つの問題から最も強い刺激を受けている．すなわち，系の安定性の問題および統計力学の基礎づけに関する問題である．これら 2 つの間の関係は第 1 章で述べたが，ここでは，古典系におけるストカスティックな運動は，系が強い不安定性をもつ結果として生じたということを思い出していただきたい．局所的不安定性と呼ばれたこの不安定性は位相空間における軌道の混合をひきおこし，また，ある変数の相関の減衰，平衡

分布関数への緩和，運動の積分の消滅などをもたらした．そして，ストカスティシティが生じる条件を探求する全ての企ては，本質的には位相空間における系の軌道の局所的安定性を分析することであった．

軌道の局所的安定性ということを述べたので，この機会に，量子力学的に問題を分析する際の困難にふれておこう．まず，量子力学においては，軌道という概念は意味がない，したがって，古典論で有益であった局所的不安性という考え方も捨てなければならない．つまり，古典力学で開発された強力な道具が（少なくても現在の形式のままでは）無効になってしまうのである．そこで，量子力学において存在すると考えられるストカスティシティを考察するには幾つかの量子論的基本原理をより一層明確にしておくことが要請される．

古典力学は安定性に関する理論を確立するうえで極めて有効であったこと，また，そこでは，位相空間における系の軌道という概念が基本的役割を演じたこと，などはすでに述べた．量子力学では，系の状態はヒルベルト空間上のベクトルで表わされる．そのベクトルの安定性という場合，その解釈は明確なものではない．それは実際の物理系の現実的な安定性と必ずしも一致するとは限らない．さらに，ハイゼンベルグ表示で量子系の運動を記述する場合にも，演算子の安定性という問題には同様な曖昧さが残ってしまうのである．

次のような簡単な例からでも古典力学と量子力学の安定性問題の間に相違のあることがわかる．9.1図に示すようなポテンシャルの中を粒子が運動している場合を考える．エネルギーEをもった古典的粒子がポテンシャル曲線の頂上付近を運動しているとしよう．ポテンシャルに摂動が作用して，ポテンシャルの頂上が図のようにわずかにさがったとすると，粒子の運動は有限領域に限られていたものから無限の領域におよぶものへ移行する可能性がある．つまり，古典的には粒子の軌道はこの摂動に対して不安定である．これを量子論的に考えると，まず，ポテンシャルの頂上付近における粒子の運動はトンネル効果によってはじめから無限の領域におよぶものであり，したがって，系のエネルギースペクトルも連続的である．ポテンシャルの小さな摂動があっても系のスペクトルの質的変化はない，そして，波動関数の変化も摂動の大きさに比例する小さなものにとどまるであろう．

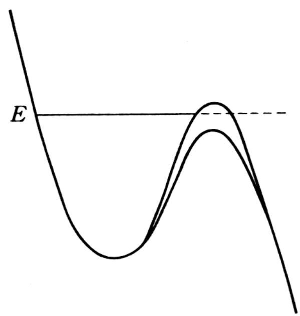


図 9.1 ポテンシャルに小さな摂動を加えると（鎖線），古典粒子の運動領域が有限から無限へと移行する．

古典力学でストカスティシティを分析するとき，系が定常的で閉じている場合と系が時間に依存する外力を受けている場合とを区別する必要はなかった．量子力学では，問題を次の二つののタイプに分けなければならない：(i)非定常な摂動を受ける系の時間発展，(ii)定常的な運動のエネルギースペクトルと波動関数．古典力学ではこの第2のタイプに対応する問題は存在しないので，数々の“都合のわるい”質問が出ることになる．

量子力学において，エネルギースペクトルを決定する際に必要となる量子条件が系の独立な運動の積分の存在と深い関連をもつことはよく知られている（たとえば，量子数は運動の積分でなければならない）．一方，古典的極限においてストカスティシティは運動の積分の消滅をもたらす．このことは量子力学では量子数の消滅に対応している．そうすると，この場合，量子条件はどうなるのであろうか？　この疑問は次のようにもっと一般的な問題に言い換えることができる．古典力学の枠内でも積分不可能な系が存在する（たとえば，三体問題である）．積分不可能性（第1章を参照）はストカスティシティの発生と関連していた（そして，ある種の運動の積分の消滅をもたらした）．しかし，積分不可能な系はこれまでのところ量子力学的に厳密な定式化がなされていないのである．そこで，これをどうするかという問題であるその定式化が直ちに可能であると考えるのは，シュレディンガー方程式が常に線型的であることからくる思い違いに依るのである．なお，古典論において積分不可能な問題を量子論的に扱うためには，これまでとは全く異なった解析方法が要請されることを後でみるであろう．

もう一つ例をあげて，広く行き渡っている誤解を指摘しておこう．それは，古典系の可積分性という性質に代る明確な概念が量子系には存在しないために生じる誤解である．連結した2個の非線型振動子の系（たとえば，5.3節のヘノン-ハイルのモデル）を考えよう．系のエネルギーが十分小さい場合（したがって，非線型性と相互作用の強さも小さい場合）を考えると，ハミルトニアンは，ある精度の範囲で対角化され，かつ，各々の振動子のハミルトニアンの和の形に書ける．各々の振動子のハミルトニアンは運動の積分である．したがって，系全体の状態は独立な2個の量子数の組 (n_1, n_2) で表現できる．系の全エネルギーはこれらの数の関数として，次のように表わせる，

$$E = E(n_1, n_2) = E_1(n_1) + E_2(n_2). \tag{9.1}$$

ここで，E_1, E_2 は各々の振動子のエネルギーである．量子論の場合，系を構成する要素の間に相互作用があると（少なくても，その相互作用が強いときには），

各要素の量子数 n_1, n_2 は量子数としての意味を失い，また，各要素の個々の波動関数ということも意味がなくなる．この場合，系の全エネルギーと系全体の波動関数だけが意味のある概念であると考えられている．しかし，この考え方がそもそもの広く行き渡っている誤解の源になっている．つまり，この場合，運動の積分は全エネルギーだけではないのである．

この辺の事情をはっきりさせるために，初めに問題を古典的極限で考えてみよう．2個の作用変数 I_1 と I_2 があって，相互作用が小さいときには，それらが運動の恒量であるとしよう．系のエネルギー E は，

$$E = E(I_1, I_2) = E(I_1) + E(I_2). \tag{9.2}$$

という形に書くことができる．相互作用のエネルギーが大きくなると，系のエネルギーを（9.2）式のように分離した形に書くことはできないが，次の形に書くことは可能である，

$$E = E(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2). \tag{9.3}$$

（9.2）式が成り立つ場合，エネルギー積分は加法的であると言い，E が（9.3）式の形にしか表現できない場合，エネルギー積分は非加法的であるという．だが，この場合でも依然として，2個の運動の積分（作用変数 I_1 と I_2）が存在している．したがって，2個の量子数が定義できる，そして，系のエネルギーが2個のパラメーターの関数になるに過ぎない．相互作用のエネルギーがさらに大きくなると，運動がストカスティシティをもつようになる可能性がある．その時になってはじめて2個の運動の積分のうち1個が消滅する，そして，全エネルギー E（あるいは，E の関数）のみが運動の積分として残る．このように，異なった自由度の間に相互作用がある場合にも，系の自由度の数と同じ数の量子数（したがって，波動関数ベクトルの基底系）が存在し得るのである．しかし，これらの量子数を具体的に決定することは簡単な問題でない．

以上の議論は古典論的分析に基づいているが，これが量子論的課題を準古典近似で扱う場合の標準的な手法である．もちろん，問題が本質的に量子論的である場合もある．その例として，スピンと角運動量の間に強い相互作用が作用している系があげられる．そこでは，これらの量に対応する量子数が消滅している．

安定性やストカスティシティの問題の分析に適した“純粋に量子論的な”言語あるいは概念が無いので，これらの問題を量子論的に定式化するとき，ある種の困難に遭遇する．かりに，準古典近似を用いても，それが適当であるという保証が無いことはこれまでの議論から明らかである．そこで，我々が扱うストカステ

ィシティに関する問題を次のように“制限”し，この制限された型の問題には量子力学が適用できるという立場をとろう．

いま，一つの量子系があって，そのハミルトニアンが

$$\hat{H}=\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t) \tag{9.4}$$

であり，$\hat{p}=(p_1, p_2, \cdots)$ および $\hat{q}=(q_1, q_2, \cdots)$ がそれぞれ運動量演算子および座標演算子であるとする（特別な場合として，ハミルトニアン $\hat{H}$ が時間に依らないこともある）．ハミルトニアン (9.4) 式に対応する古典系，すなわち，(9.4) 式で $\hbar$ を 0 にとったハミルトニアン系がストカスティックな運動を現わす場合，(9.4) 式で記述される量子系を量子論的 K 系と名づける．我々がこれから扱う問題はこの量子論的 K 系の力学に制限する．同じことを逆に言うと，古典的 K 系をどのように量子化するか？　ということである．それをこの章と次の章で考察しよう（注釈1を参照）．

9. 2　量子論的写像

シュレディンガー表示の写像，ハイゼンベルグ演算子の写像，2次元位相空間への射影，射影写像，射影の非マルコフ写像．

古典系を分析した経験から，運動に関する微分方程式を差分形式（写像）の方程式に変換すると，問題の取り扱いが格段と簡単になることを知った．そこで，量子系を分析する場合，写像による記述が可能な量子系から出発するのが得策である．

はじめに，ハミルトニアンが次式で与えられる系を考える，

$$\hat{H}=\hat{H}_0(\hat{p},\hat{q})+\varepsilon\hat{V}(\hat{q},t),$$

$$\hat{V}(\hat{q},t)=V(\hat{q})T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT). \tag{9.5}$$

このハミルトニアンは，変数 $(\hat{p}, \hat{q})$ が c 数であるとして古典論的極限を考えれば，(4.4) 式に一致する．ハミルトニアン (4.4) 式については 4.1 節において詳しく論じた．そこでの考察で，明らかなように，(4.3) 式の形のハミルトニアンは特別に重要な性質をもっている．すなわち，この形のハミルトニアンは離散的な写像を構成するのに適している，そのうえ，非定常な摂動を受けている自由度1の幾つかの系がこのハミルトニアンで記述でき，かつ，それらの写像がみな

ユニバーサルな構造をもつものになる．物理的にみると，(4.3) 式と (9.5) 式は，ともに，非常に広い振動数領域の摂動を受ける非線型振動子を表わしている．

ハミルトニアンが (9.5) 式で与えられる系の状態は，次のシュレディンガー方程式を満たす波動関数 $\psi(q,t)$ によって規定される，

$$i\hbar\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t}=\hat{H}\psi(q,t)=[\hat{H}_0(\hat{p},\hat{q})+\varepsilon\hat{V}(\hat{q},t)]\psi(q,t). \tag{9.6}$$

この波動関数に対する写像を求めよう．まず，次の記号を定義しておく，

$$\psi_n=\psi(q,\ t_n^+)\equiv\psi(q,\ nT+0),$$
$$t_n^{\pm}\equiv nT\pm0. \tag{9.7}$$

方程式 (9.6) を形式的に解くと，その解は，

$$\psi(q,t_2)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}dt\right)\psi(q,\ t_1), \tag{9.8}$$

と書ける．この (9.8) 式の表式と定義式 (9.7) を用いると，次の関係式が得られる，

$$\psi_{n+1}=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_n^+}^{t_{n+1}^+}\hat{H}dt\right)\ \psi_n=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_{n+1}^-}^{t_{n+1}^+}\hat{H}dt\right)\psi(q,t_{n+1}^-)$$
$$=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_{n-1}^-}^{t_{n+1}^+}\hat{H}dt\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-}\hat{H}dt\right)\psi_n \tag{9.9}$$

時間 $(t_n^+,\ t_{n+1}^-)$ の間は $\hat{V}(q,t)=0$，すなわち，摂動がないから，系は自由運動の状態である．これに対して，時間 $(t_{n+1}^-,\ t_{n+1}^+)$ の間の摂動による積分 $\int\hat{H}dt$ への寄与は，$\hat{V}(\hat{q},t)$ の中の δ 関数を考慮すると，$\hat{V}\ (q,t_{n+1})$ になることがわかる．したがって (9.9) 式は次のようになる，

$$\psi_{n+1}=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon T\hat{V}(q)\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0T\right)\psi_n. \tag{9.10}$$

この (9.10) 式がシュレディンガー表示の量子論的写像である．しかし，これを直接反復的に利用して任意の時刻における解を導くには困難がともなう．それは，一般的に $\hat{V}(q)$ と $\hat{H}_0$ とは交換しないからである．

つぎに，ハイゼンベルグ表示の演算子に対する写像を考えよう．そのため，まず，次の交換関係をみたすボソン粒子の生成演算子 a^+ と消滅演算子 a を導入しておく，

$$[a,a^+]=1.$$

演算子 (a,a^+) と $(\hat{p},\hat{q})$ の間の関係にはかなりの任意性がある．たとえば，標準的なものとして次の様な関係が考えられる，

$$a=i(2m\omega\hbar)^{-1/2}(\hat{p}-im\omega\hat{q}),$$
$$a^{+}=-i(2m\omega\hbar)^{-1/2}(\hat{p}+im\omega\hat{q}). \tag{9.11}$$

議論を具体的に行うために，(9.5) 式のハミルトニアンを，

$$\hat{H}=\hat{H}_0(a^+a)+\varepsilon\hat{V}(a^+,a,t),$$
$$V(a^+,a,t)=\hbar(a^++a)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT), \tag{9.12}$$

の形にとろう．表式 (9.12) の意味は割合に簡単である．この (9.12) 式の古典的極限をとると，(9.11) 式により $\langle a^+a\rangle$ は無次元の作用変数 $(I/\hbar)$ に対応し，また，演算子 (a^++a) は位置座標に対応する．それ故，古典的極限において，(9.12) 式は次のようになる，

$$H=H_0(I)+(2m\omega\hbar)^{1/2}\,\varepsilon q\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT). \tag{9.13}$$

このハミルトニアン (9.13) 式の摂動項の構造はいわゆる振動子と場の相互作用の双極子モードを表わしている．位置座標 q を作用と角変数 (I,θ) で表現すれば，(9.13) 式は (4.4) 式の形のハミルトニアンになる．

さて，ハイゼンベルグ表示の運動方程式は次の形に書ける，

$$i\hbar\dot{a}=[a,\hat{H}]=\hbar\omega(a^+a)a+\varepsilon\hbar\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT). \tag{9.14}$$

ただし，$\hbar\omega(a^+a)a$ は，

$$\hbar\omega(a^+a)a=[a,\hat{H}_0(a^+a)], \tag{9.15}$$

を意味する．$a^+a\equiv\hat{n}$ と $H_0(a^+a)$ は交換するので，a^+a は2つの δ 関数形のパルスの中間 (t_1,t_2) では不変である．したがって，この時間の間の $a(t)$ の時間発展は，(9.14) 式により，

$$a(t_2)=\exp[-i\omega(a^+a)(t_2-t_1)]a(t_1), \tag{9.16}$$

で表わされる．いま，δ 関数形の摂動パルスが $t=t_0$ の瞬間に作用するとしよう．この瞬間 t_0 の近傍で (9.14) 式を積分すれば，

$$a(t_0+0)=a(t_0-0)-i\varepsilon \tag{9.17}$$

の関係が得られる．

ここで，離散的時刻 nT と $(n+1)T$ における a を表わす記号 a_n と a_{n+1} を次式で定義する，

$$a_n=a(nT-0),$$
$$a_{n+1}=a((n+1)T-0). \tag{9.18}$$

関係式 (9.16) と (9.17)（およびこれらと共役な関係式）を用いて，a_n と a_{n+1}

との関係を求めると，

$$a_{n+1}=\exp\left[-i\omega(\bar{a}_n^+\bar{a}_n)T\right]\bar{a}_n,$$
$$a_{n+1}^+=\bar{a}_n^+\exp\left[i\omega(\bar{a}_n^+\bar{a}_n)T\right], \tag{9.19}$$

という写像が得られる．ただし，

$$\bar{a}_n\equiv a_n-i\varepsilon,\quad \bar{a}_n^+\equiv a_n^++i\varepsilon,$$

である．表式（9.19）がハイゼンベルグ演算子に対する量子論的 T 写像である．この写像を次のように記号 $\hat{T}$ で書き表わすことにする，

$$(a_{n+1},\ a_{n+1}^+)=\hat{T}(a_n,\ a_n^+). \tag{9.20}$$

つぎに，写像（9.10）式と（9.20）式の分析に進もう．古典的な場合は，有限個の成分をもつベクトルの写像を考察すればよかった．量子論の場合には，1つの場の量 $\phi(q,t)$ に対する写像（9.10）式を考えるか，あるいは，場の量が固有関数になっているような演算子に対する写像（9.20）式を考えなければならない．このような写像の分析に適した1つの処方として，その写像をある空間に射影して分析する方法が考案されている［131, 132］．この方法に関連して，補足的な説明を幾つか述べておこう．

いま，状態ベクトルの1つの基底を記号 <| または |> で表示すると，演算子 a と a^+ の量子力学的期待値は次の表式で表わされる，

$$\alpha=\langle|a|\rangle,\quad \alpha^*=\langle|a^+|\rangle. \tag{9.21}$$

これら2つの値 α と α^* によって，射影空間 (α,α^*) を定義することができる．今後，この射影空間は古典力学において位相空間が果たしたのと同じ役割を果たすことになろう．

写像（9.20）式のこの射影空間への射影（期待値）をとると，その結果は，

$$(\alpha_{n+1},\ \alpha_{n+1}^*)=\langle|\hat{T}(a_n,\ a_n^+)|\rangle \tag{9.22}$$

と書ける．この表式（9.22）は，右辺がまだ $(\alpha_n,\ \alpha_n^*)$ の関数になっていないので，閉じた形にならない．もしも，この右辺が $(\alpha_n,\ \alpha_n^*)$ の関数として与えられるならば，

$$(\alpha_{n+1},\ \alpha_{n+1})=\mathscr{T}(\alpha_n,\ \alpha_n^*), \tag{9.23}$$

の形の写像が得られて，問題は解かれたことになるが，いまの場合はそのようになっていない．有限次元（いまの場合は2次元）のベクトルのときならば，我々はすでに（9.23）式の形の写像を知っている．演算子 $\mathscr{T}$ が $(\alpha_{n-1},\ \alpha_{n-1}^*;\ \cdots;\ \alpha_0,\ \alpha_0^*)$ に依存しない場合，$\mathscr{T}$ はマルコフ型演算子といわれる．これまで考察してきた古典的な問題では，写像演算子は全てマルコフ型演算子であったが，次の章で

示すように，量子力学の場合には写像演算子が非マルコフ型である．

9．3　コヒーレント状態を基底にした射影

コヒーレント状態とその性質．ノーマル順序と射影．$\hbar$ についてのべき展開．量子力学的期待値に対する非ハミルトニアン形式の方程式．$\hbar$ 展開における発散．

(9.23) 式の射影写像の具体的な形を求めるためには，演算子 $\mathscr{T}$ を表現する基底状態ベクトル $|>$ または $<|$ を適当に選択する必要がある．この取り方にはかなりの任意性があるが，ここでは，コヒーレント状態をとる．コヒーレント状態というのは，演算子 a^+ あるいは a の左固有関数または右固有関数であって，次式で定義される，

$$\langle\alpha|a^+=\alpha^*\langle\alpha|,\quad a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle. \tag{9.24}$$

歴史的には，コヒーレント状態は，はじめ，線型振動子の場合に幅が変化しない波束の例として，シュレディンガーによって考察され，後に，グラウバー (R. J. Glauber) によって定式化されたものである [133]．後の議論で必要なコヒーレント状態の諸性質を手短かにまとめて述べておく [134, 135]．

まず，コヒーレント状態 $|\alpha>$ は次式で表わされるガウス型の波束，

$$|\alpha>=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left\{-\left[\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}x-\alpha\right]^2+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}\right\}, \tag{9.25}$$

であり，かつ，最小の不確定性関係，$\Delta p\Delta x=\hbar/2$ を満たす．

コレーレント状態は完全系を構成する．単位演算子1のコヒーレント状態への分解は次の形式で表現される，

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|=1,\quad d^2\alpha\equiv d(\mathrm{Re}\,\alpha)\,d(\mathrm{Im}\,\alpha).$$

コヒーレント状態の基底は重複している．それで，1つのコヒーレント状態は他のコヒーレント状態の重ね合せで表わされる．つまり，次の関係が成り立つ，

$$\begin{aligned}|\alpha>&=\frac{1}{\pi}\int d^2\beta\exp\left(\alpha\beta^*-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2\right)|\beta>,\\&=\frac{1}{\pi}\int d^2\beta<\beta|\alpha>|\beta>,\end{aligned} \tag{9.26}$$

1つのコヒーレント状態 $|\alpha>$ は“粒子数”の固有状態 $|n>$ で次の様に展開できる，

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}|n\rangle,$$
$$= \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \tag{9.27}$$

ここで，$\hat{D}(\alpha)$ は状態ベクトル $|0\rangle$ を状態ベクトル $|\alpha\rangle$ に移す演算子であり，移動演算子と呼ばれる，また，これは

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^{+} - \alpha^{*} a), \tag{9.28}$$

と表わせる．この移動演算子の積の法則は次式のようになる，

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha+\beta)\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^{*} - \alpha^{*}\beta)\right]. \tag{9.29}$$

コヒーレント状態は直交せず，有限領域で“重複”する，そして，次式を満たす

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha-\beta|^2),$$
$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \beta^{*}\alpha\right). \tag{9.30}$$

ある任意の系の時刻 t_0 の状態として，1つのコヒーレント状態を対応させることが可能である [134～136]．しかし，その後の系の状態は同じコヒーレント状態に対応するとは限らない．それは，一般に，非線型系の波束は時間の経過とともにその幅をひろげてしまうからである（非線型系のこの性質は以前からパウリによって知られていた [137]）．これに対する例外は，2次形式のハミルトニアン系と非線型系の幾つかの特殊な場合だけである．

初期時刻 t_0 のコヒーレント状態を $|\alpha_0\rangle$ または $\langle\alpha_0|$ で表わし，ハイゼンベルク演算子 a および a^{+} の初期値を a_0 および a_0^{+} と書くと，定義式 (9.24) により，次式を得る，

$$a_0|\alpha_0\rangle = \alpha_0|\alpha_0\rangle, \quad \langle\alpha_0|a_0^{+} = \alpha_0^{*}\langle\alpha_0|,$$
$$a_0 = a(0), \quad a_0^{+} = a^{+}(0). \tag{9.31}$$

2つの変数 $(\alpha_0,\ \alpha_0^{*})$ の空間を位相空間と呼ぶことにすると，演算子の任意関数 $Q(a_0^{+},\ a_0)$ の位相空間への射影は次の表式で表わされる，

$$\langle Q\rangle \equiv \langle\alpha_0|Q(a_0^{+}, a_0)|\alpha_0\rangle. \tag{9.32}$$

関数 $Q(a_0^{+}, a_0)$ の中の演算子 a_0^{+} と a_0 をノーマル順序に換えたものを記号 $Q^{(N)}(a_0^{+}, a_0)$ で表現する．ノーマル順序に換えるということは，交換関係を用いて $Q(a_0^{+}, a_0)$ を，

$$Q^{(N)}(a_0^{+}, a_0) = \sum_{k,l} Q_{kl}(a_0^{+})^k a_0^l, \tag{9.33}$$

の形に書き換えること，すなわち，全ての a_0^{+} を a_0 の左側に移し，a_0 は全て a_0^{+} の右側に移すことを意味する．Q と $Q^{(N)}$ とは，交換関係を用いて a_0^{+} と a_0 との

配列が換えられているだけであるから，演算子としては，$Q=Q^{(N)}$ である．

なお，(9.33) 式では関数 Q の a_0^+ と a_0 のべき展開が可能であることが前提になっている．定義式 (9.31) と (9.32) から，射影に関する次の規則が導かれる，

$$\langle Q\rangle=\langle Q^{(N)}(a_0^+,\ a_0)\rangle=Q^{(N)}(\alpha_0^*,\ \alpha_0), \tag{9.34}$$

すなわち，関数演算子 Q の期待値は，Q をノーマルな順序にかえた後の $Q^{(N)}$ (a_0^+, a_0) の a_0^+ と a_0 の所にそれぞれ c 数 α_0^* と α_0 を代入したものになる．

さて，以上述べたコヒーレント状態に関する性質を利用して，位相空間 (α_0^*, α_0) における写像を考察しよう．演算子 $a^+(t)$ と $a(t)$ に対するハイゼンベルグの運動方程式が，たとえば，量子論的写像 (9.19) 式，またはそれを一般化した (9.20) 式で与えられるとする．これは，演算子 a_n^+ と a_n が初期値 a_0^+ と a_0 の何らかの関数として表わされることを意味する．すなわち，a_n^+ と a_n が

$$a_n^+=a_n^+(a_0^+, a_0),$$
$$a_n=a_n(a_0^+, a_0).$$

と表わされることを意味する．

これらの2つの式に定義式 (9.13) と規則 (9.34) を適用すると，関係式

$$\alpha_n\equiv\langle a_n\rangle=a^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0)$$
$$\alpha_n^*\equiv\langle a_n^+\rangle=a^{+(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0) \tag{9.35}$$

が得られる．この2式は，(9.22) 式と (9.23) 式によって導入された射影空間の移動演算子 $\mathcal{T}$ も初期条件に依存することを意味する．したがって，$\mathcal{T}$ はマルコフ型演算子ではない．

上述のハイゼンベルグの運動方程式を直接厳密に解くことは極めて困難であり，一般的に不可能である．それが可能なのは，a_n^+ と a_n の順序づけ（ノーマル順序に直すこと）が初期条件の a_0^+ と a_0 の順序づけから簡単に導ける特別な場合だけである．そこで，我々としては，解を求めるために何らかの近似法を探るべきである．ここでは，$\hbar$ のべき展開の表式を導くことにしよう．その場合のノーマル順序の規則を求めるために，準古典近似のノーマル順序の問題を考える [131, 132]．

a_0^+ と a_0 が交換するもの（c 数として扱える）として，a_0^+ と a_0 をノーマルな順序にかえる演算子を $\hat{N}$ で表わす，すなわち

$$\hat{N}\{(a_0)^p(a_0^+)^q\}=(a_0^+)^q(a_0)^p, \tag{9.36}$$

で $\hat{N}$ を定義する．(9.33) 式の $Q^{(N)}(a_0^+, a_0)$ の定義では，a_0^+ と a_0 との非可換性が考慮されているので，$Q^{(N)}(a^+, a_0)$ と (9.36) 式の $\hat{N}$ とは異ること，式で表

わすと

$$\hat{N}Q(a_0^+, a_0) \neq Q^{(N)}(a_0^+, a_0),$$
$$\hat{N}\{Q^{(N)}(a_0^+, a_0)\} = Q^{(N)}(a_0^+, a_0),$$

であることに注意しよう．

a_0 と a_0^+ の交換関係を $[a_0, a_0^+] = \hbar$ にとると次の恒等式が成りたつことが知られている [138],

$$(a_0)^p(a_0^+)^q = \hat{N}\left\{\left(a_0 + \hbar\frac{\partial}{\partial a_0^+}\right)^p (a_0^+)^q\right\}. \tag{9.36}$$

上式の左辺を $\hbar$ についてべき展開すると，関係式，

$$(a_0)^p(a_0^+)^q = (a^+)^q(a_0)^p + \hbar pq(a_0^+)^{q-1}(a_0)^{p-1} + O(\hbar^2). \tag{9.38}$$

が得られる．(9.37) 式と (9.38) 式を，任意の 2 つの関数演算子 $Q_1(a_0^+, a_0)$ と $Q_2(a_0^+, a_0)$ に適用すれば，次の関係式が導かれる，

$$Q_1Q_2 = Q_1^{(N)}Q_2^{(N)} = \hat{N}\{Q_1^{(N)}Q_2^{(N)} + \hbar\hat{\mathscr{D}}(Q_1^{(N)}, Q_2^{(N)})\} + O(\hbar^2). \tag{9.39}$$

ここで，$\hat{D}$ は次の演算子を意味する，

$$\mathscr{D}(A, B) = \frac{\partial A}{\partial a_0}\frac{\partial B}{\partial a_0^+}. \tag{9.40}$$

(9.39) 式に射影規則 (9.34) を適用すれば，2 個の関数演算子の積の射影規則が，$\hbar$ についての展開形式で次の形に書ける，

$$\begin{aligned}\langle Q_1Q_2\rangle = {} & Q_1^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0)Q_2^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0) \\ & + \hbar\mathscr{D}(Q_1^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0), Q_2^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0)) + O(\hbar^2).\end{aligned} \tag{9.41}$$

演算子のもっと復雑な表式の射影規則も上述と同様な方法で導くことができる．このようにして得られた $\hbar$ のべき展開の射影規則は次の節で重要な役割をはたすであろう．*

射影された量の運動方程式については注意が必要である．正準共役な変数 (p, q) とこれに対応する演算子 ($\hat{p}, \hat{q}$) を考えよう．古典的変数 (p, q) の運動方程式はハミルトニアン形式の方程式である．しかし，期待値 ($\langle p\rangle$, $\langle q\rangle$) の運動方程式は一般にハミルトニアン形式にはならない．ハミルトニアンが $\hat{p}$ と $\hat{q}$ の二次形式になっている場合（たとえば，線型振動子の場合）は例外である．この点について，例を挙げて説明しよう [139].

演算子 ($\hat{p}, \hat{q}$) よりもこれらの 1 次結合の演算子 (a^+, a) を用いた方が便利で

---

* 以下で上記の関係式 (9.36)〜(9.41) を用いるときには，はじめに交換関係を $[a, a^+] = 1$ にとったので，これらの関係式の $\hbar$ を形式的に 1 にしたものが使われる．

ある．いま，系のハミルトニアンが

$$H_0=\hbar\omega a^+a+\hbar^2\mu(a^+a)^2, \tag{9.42}$$

であるとする．このときの a の運動方程式は

$$i\dot{a}=(\omega+\hbar\mu)a+2\hbar\mu a^+aa, \tag{9.43}$$

となる．a^+ の運動方程式は，この (9.43) 式のエルミト共役をとることによって得られる．a^+a とハミルトニアンは交換するから，方程式 (9.43) は容易に積分できる．その解は

$$\begin{aligned} a(t)&=\exp\left[-i(\omega+\hbar\mu+2\hbar\mu a^+a)t\right]a_0 \\ &=\exp\left[-i(\omega+\hbar\mu+2\hbar\mu a_0^+a_0)t\right]a_0, \end{aligned} \tag{9.44}$$

となる．ただし，$a_0=a(0)$，$a_0^+=a^+(0)$ である．ノーマル順序に関するよく知られた公式 [138] を使うと，(9.44) 式は次の形に書き換えられる，

$$a(t)=e^{-i(\omega+\hbar\mu)t}\hat{N}\{\exp(e^{-2i\mu\hbar t}-1)\tilde{a}_0^+\tilde{a}_0\}a_0 \tag{9.45}$$

ここで，$\tilde{a}_0^+$ と $\tilde{a}_0$ につけた波印～は，$\tilde{a}_0^+$ と $\tilde{a}_0$ が演算子 $\hat{N}$ の作用のもとでは c 数として扱われることを意味する記号である．定義式 (9.34) 式を用いて，(9.45) 式の期待値を表わせば，

$$\begin{aligned} \alpha(t)&=\langle\alpha_0|a(t)|\alpha_0\rangle \\ &=e^{-i(\omega+\hbar\mu)t}\exp[(e^{-2i\mu\hbar t}-1)|\alpha_0|^2]\alpha_0, \end{aligned} \tag{9.46}$$

を得る．$\alpha^*(t)$ に対する表式は (9.46) 式の複素共役をとることによって得られる．

さて，位相空間 (α^*, α) を考え，この位相空間上の軌道 $(\alpha^*(t), \alpha(t))$ に沿った体積要素の変化量を計算してみよう．その変化量は次のヤコビアンで与えられる，

$$\begin{aligned} J(t)&=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha(t)}{\partial\alpha_0} & \dfrac{\partial\alpha(t)}{\partial\alpha_0^*} \\ \dfrac{\partial\alpha^*(t)}{\partial\alpha_0} & \dfrac{\partial\alpha^*(t)}{\partial\alpha_0^*} \end{vmatrix} \\ &=(1-4|\alpha_0|^2\sin^2\hbar\mu t)\exp\{-4|\alpha_0|^2\sin^2\hbar\mu t\}. \end{aligned} \tag{9.47}$$

この式から，軌道に沿った位相空間の体積要素は，時間的に周期，

$$T_0=\pi/\hbar\mu, \tag{9.48}$$

で振動することがわかる．また，$J(t)$ が，時刻 $t_n=nT_0(n=0, 1, 2, \cdots)$ で1になることも明らかである．

ハイゼンベルグ演算子 $a^+(t)$ と $a(t)$ の元の運動方程式はハミルトニアン形式

であった．しかし，（コヒーレント状態の基底も含めた）任意の基底を用いてその運動方程式を射影した場合，射影された物理量の運動方程式が元と同じハミルトニアン形式の構造をもつとは限らないのである．ところで，いまの例の場合，$\hbar\to 0$ の極限を考えると，射影 $\alpha^*(t)$ と $\alpha(t)$ の運動方程式は，ハミルトニアン形式の古典的運動方程式に移行しなければならない．そのためには，$\hbar$ についての展開式が常に解析的であることは有り得ず，むしろ，その展開が，ある限られた時間の範囲でのみ許されるようになっている可能性がある．事実，表式 (9.47) によると，$\hbar$ 展開の級数として表わされる量子論的補正項は時間とともに発散することがわかる．それらが小さな補正項として留まるのは，時間 t が

$$t<t_0=\frac{1}{\mu\hbar|\alpha|}\sim\frac{T_0}{|\alpha|} \tag{9.49}$$

の範囲内のときである．このように量子論的補正項の有効性が時間的制約を受けるという事実が量子論的 K 系の運動の本質的特徴であることが後で明らかにされる．

9. 4　波束の拡がり

非線型性の役割，“自由な”波束の拡散時間，準古典近似の有効条件.

この節では，射影位相空間上の運動に関して前節で得られた結果を定性的に分析してみよう．対応する古典系の代表的な作用変数の値が I であるとして，もし，不等式，

$$|\alpha^2|\sim\frac{I}{\hbar}\gg 1, \tag{9.50}$$

が成り立つならば，系の状態は近似的に古典論で取り扱えると考えられるかもしれない．しかし，条件 (9.49) 式は，このような結論をくだすには十分に気をつけなければならないことを示唆している．いま，系の運動が或る特性時間 T の間だけ，不等式 (9.50) を満足するとしよう．この T が，さらに，$T\ll t_0$〔t_0 は (9.49) 式で与えられる時間〕を満たすならば，確かに量子論的補正項は小さい値にとどまる．しかし，これと逆の不等式 $T\gg t_0$ の場合は，系の実際の運動過程は古典的極限で与えられる形態をとらないし，また，量子論的補正項は小さい値にとどまらない．別の言い方をすれば，特性時間 T の間だけ不等式 (9.50) が成りたつからと言って，準古典近似の適用範囲を決める目安として，これだけを条件

とするのは妥当でない．その条件を求めるためには，表式（9.47）と（9.49）に導く物理的要素をもっと詳しく調べる必要がある．

量子力学においては，系の個々の軌道を扱うことはめったになく，むしろ，波束に注目する場合が多い．そこで，粒子が位相空間上で占める領域（位相流体の細胞）の時間発展を考察することから始めよう．たとえば，これらの粒子が同一の振動数をもった線型振動子である場合には，位相空間の細胞はその境界の形を変えることなく運動する．量子力学的には，これは，拡散のない波束（コヒーレント状態）が構成されることに対応する．粒子が非線型振動子の場合には事情は全く異なってくる．この場合，振動子の振動数がエネルギー（または作用変数）に依存する．したがって，細胞の異なった部分から出発した粒子は異なった速度で運動するので，細胞の境界は変形する（図 9.2）．時間とともに，細胞は或る方向に伸びて行き，細胞の“先端”は増々鋭角的になる．これは，やがて細胞の境界を表わす関数が多価関数になるという事態をもたらす．これはまた，流体力学において非線型波の波面が転倒する時，流れが多価関数になるのと同じ現象である（図9.3を参照）．古典力学におけるこのような状況は，非線型系の量子力学では拡散のない波束が存在し得ないことに対応する．いま波束が，初め，作用－角変数の空間の領域（ΔI_0，$\Delta\theta_0$）に局在しているとしよう．ある時間の後，波束の拡散のため角変数が完全に不確定，つまり $\Delta\theta\sim 2\pi$ になるとする．系が振動数 $\omega(I)$ の非線型振動子であるとして，また，量子論的には ΔI_0 の最小値が $\hbar$ であることに注意して，この時間の最大値を評価すると，

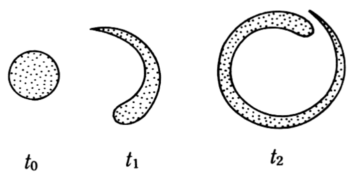


図 9.2　位相液体の細胞の変化

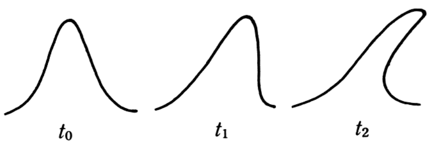


図 9.3　位相液体の細胞の“先端”が鋭角的になる様子

$$\tau_\hbar=\frac{1}{\left|\dfrac{d\omega(I)}{dI}\right|\Delta I_0}\sim\frac{1}{\hbar\left|\dfrac{d\omega(I)}{dI}\right|}=\frac{1}{\hbar\mu},\tag{9.51}$$

が得られる．時刻 t が，この $\tau_\hbar$ 以上に経過すると，量子論的効果が本質的になる．（9.42）式の特殊なモデルで計算された結果〔（9.48）式〕と（9.51）式は正確に同じであることに注意しよう．

最後に，この節の議論の要約を簡単にするため次のようなパラメーターを導入する，

$$\zeta \equiv \frac{T}{\tau_\hbar} = \hbar\mu T. \tag{9.52}$$

ここで，Tはこの節のはじめの所で定義した時間を意味する．もしも不等式（9.50）と $\zeta \ll 1$ が成り立つならば，量子論的補正が小さくかつ系の運動が近似的に古典的になるような時間間隔が存在する．逆に，$\zeta \gg 1$ の場合は，T よりも短い時間内で量子論的効果が本質的に大きくなってしまう．さらに，$\zeta \sim 1$であることは，系の運動が本質的に量子論的である領域の限界を表わす．不等式（9.50）が成り立つか否かはパラメーターζの値と直接には関係ないので，与えられた系が準古典的になる条件は，不等式（9.50）式と不等式$\zeta \ll 1$，が成り立つことである．

なお，パラメーター ζ の役割については，後で量子論的 K 系の運動を分析するとき，しばしば議論するであろう．

9．5　$\hat{\mathscr{T}}$写像とストカスティシティの条件（近似的解析）

$\mathscr{T}$ 写像の導出，古典近似，量子論的補正と $\mathscr{D}$ 形式，量子論的補正の指数関数的発散，ストカスティシティのための量子論的しきい値，準古典領域とその存在条件．

量子論的 $\hat{T}$写像を定義する方程式（9.19）を考察しよう．これは，ハミルトニアンとして（9.13）式をもつ系のハイゼンベルグ演算子 $a^+(t)$ と $a(t)$ に対する量子論的写像であった．無摂動ハミルトニアンを（9.42）式の形のものに特定し，また，摂動項としては（9.12）式をとると，ハミルトニアン（9.13）式は次のように書ける，

$$\hat{H} = \hbar\omega a^+ a + \hbar^2\mu(a^+ a)^2 + \varepsilon\hbar(a^+ + a)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \tag{9.53}$$

上記のハミルトニアンの場合に，（9.19）式に相当する写像を計算すると，

$$a_{n+1} = \exp\left[-i(\omega + \hbar\mu + 2\hbar\bar{a}_n^+\bar{a}_n)T\right]\bar{a}_n, \tag{9.54}$$

が得られる．この（9.54）式の$\hat{\mathscr{T}}$写像の $\hbar$ 展開を求めよう．（9.54）式のコヒーレント状態を基底にした射影を得るには，この式の a_0^+ と a_0 をノーマル順序に書き換える必要がある．はじめに，指数関数の展開式，

$$e^{sa_n^+ a_n} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{s^p}{p!}(a_n^+ a_n)^p, \tag{9.55}$$

をノーマル順序に書き換えることを考える．2つの公式（9.38）と（9.39）を用いると，次の表式を導くことができる，

$$(a_n^+a_n)^p=\hat{N}\{(a_n^+a_n)^p+p(a_n^+a_n)^{p-1}\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n)$$
$$+\frac{1}{2}p(p-1)(a_n^+a_n)^{p-2}\hat{\mathscr{A}}(a_n^+,a_n)\}+O(\hbar^2). \tag{9.56}$$

ただし，この書式において，また，以下においても同様であるが，$a_n^{(N)}$（a_0^+，a_0）あるいは $a_n^{(N)}$（a_0^+，a_0）と書くべきところを，それぞれ，簡略化して a_n, a_n^+ と書いてある．さらに，$\hat{\mathscr{A}}(a_n^+,\ a_n)$ は次のように定義される記号である，

$$\hat{\mathscr{A}}(a_n^+,a_n)\equiv a_n^2\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n^+)+a_na_n^+\hat{\mathscr{D}}(a_n,a_n^+)$$
$$+a_n^+a_n\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n)+(a_n^+)^2\hat{\mathscr{D}}(a_n,a_n). \tag{9.57}$$

関係式（9.56）を（9.55）式に適用すると，次の指数関数のノーマル順序の表式が書ける，

$$e^{sa_n^+a_n}=1+s\hat{N}\{a_n^+a_n+\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n)\}+\hat{N}\{\sum_{p=2}^{\infty}\frac{s^p}{p!}[(a_n^+a_n)^p+p\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n)$$
$$\times(a_n^+a_n)^{p-1}+\frac{1}{2}p(p-1)(a_n^+a_n)^{p-2}\times\hat{\mathscr{A}}(a_n^+,a_n)]\}+O(\hbar^2)$$
$$=\hat{N}\{[1+s\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n,a_n)+\frac{1}{2}s^2\hat{\mathscr{A}}(a_n^+,a_n)[e^{sa_n^+a_n}+O(\hbar^2). \tag{9.58}$$

同様の手続きによって，次の関係式，

$$e^{sa_n^+a_n}a_n=\hat{N}\{e^{sa_n^+a_n}+\hat{\mathscr{D}}(e^{sa_n^+a_n},\ a_n)\}+O(\hbar^2)$$
$$=\hat{N}\{[a_n+2s\hat{\mathscr{D}}(a_n^+,a_n)+sa_n^+\hat{\mathscr{D}}((a_n,a_n)$$
$$+\frac{1}{2}s^2a_n\hat{\mathscr{A}}(a_n^+,\ a_n)]e^{sa_n^+a_n}\} \tag{9.59}$$

も導かれる．

（9.56）式の直後で注意したが，上記の各表式の演算子 $\hat{N}$ のあとにある a_n^+ と a_n は全て，それぞれ，$a_n^{+(N)}(a_0^+,\ a_0)$ と $a_n^{(N)}(a_0^+,\ a_0)$ を意味する．表式（9.58）および（9.59）を位相空間に射影することは，これらの表式の中の a_n^+ と a_n をそれぞれ α_n^* と α_n に書き換えることによって達成される．（9.57）式から（9.58）式までの関係式を（9.54）式に代入して，その両辺の期待値をとれば，

$$\alpha_{n+1}=(\bar{\alpha}_n-\hbar\varDelta\alpha_n)\exp[-i(\omega+\hbar\mu+2\hbar\mu|\bar{\alpha}_n|^2T]+O(\hbar^2),$$
$$\bar{\alpha}_n=\alpha_n-i\varepsilon,\ \ \bar{\alpha}_n^*=\alpha_n^*+i\varepsilon, \tag{9.60}$$

が得られる．ただし，$\varDelta\alpha_n$ は

$$\varDelta\alpha_n=-i\mu T\bar{\alpha}_n-4i\mu T\bar{\alpha}_n\hat{\mathscr{D}}(\alpha_n^*,\alpha_n)-2i\mu T\bar{\alpha}_n^*\hat{\mathscr{D}}(\alpha_n^*,\alpha_n)$$
$$-2\mu^2T^2\bar{\alpha}_n\hat{\mathscr{A}}(\alpha_n^*,\alpha_n), \tag{9.61}$$

で与えられ，量子効果の補正項を表わす．求めるべき $\mathscr{T}$ 写像が，表式（9.60）と（9.61）式によって $\hbar^2$ の項まで決定された．$\hbar$ を0に近づけけると，写像（9.60）

式を，対応する古典的写像，

$$\alpha_{n+1}=\bar{\alpha}_n \exp\left[-i(\omega+2\hbar\mu|\alpha_n|^2)T\right]. \tag{9.62}$$

に移すことができる．これを，作用と角変数（I, θ）で表示された標準的な古典論的写像に書き換えるには，次の形の変数変換を考えればよい，

$$\alpha_n=\left(\frac{I_n}{\hbar}\right)^{1/2} e^{-i\theta_n}, \quad \alpha_n^*=\left(\frac{I_n}{\hbar}\right)^{1/2} e^{i\theta_n}. \tag{9.63}$$

（9.63）式を用いて，（9.62）式を書き換えると，写像，

$$\begin{aligned} I_{n+1}&=I_n(1+2\varepsilon\sin\theta_n+\varepsilon^2),\\ \theta_{n+1}&=\arctan\left(\tan\theta_n+\frac{\varepsilon}{\cos\theta_n}+\omega T+2\mu T I_n\right), \end{aligned} \tag{9.64}$$

が得られる．この写像（9.64）は非線型振動の場合の典型的なものである．このような写像はすでに第4章で考察した（たとえば，（4.1）式をみよ）．（9.64）式を分析するために，次の微分係数，

$$\frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_n}=\frac{1+\varepsilon\sin\theta}{1+2\varepsilon\sin\theta+\varepsilon^2}+K\cos\theta. \tag{9.65}$$

を考えよう．ここで，K は

$$K=4\varepsilon\mu_0\omega T \tag{9.66}$$

であり，また，μ_0 は無次の非線型パラメーターを意味し，

$$\mu_0=\mu I/\omega \tag{9.67}$$

で定義される．さらに，（9.65）式の右辺において，θ につけるべき添字 n は記号の簡素化のため省いてある．パラメーター K の定義式（9.66）が第4章の（4.11）式と一致していることに注意しよう．それで，4.1節の議論はそのまま（9.63）式にもあてはまる．したがって，$K \ll 1$ の場合には，振動子の運動は準周期的になる．

また，逆の不等式

$$K \gtrsim 1 \tag{9.68}$$

は，系の運動がストカスティックになるための条件になる．

ここで，ストカスティックになるための条件（9.68）が成り立つときの（9.64）式の模型が示す幾つかの基本的性質に注意しよう．その第1は，変数 θ の運動が速やかに混合的になり，そして，θ に関する相関関数が指数関数的に減少することである，すなわち，

$$\mathscr{R}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_0 e^{-i(\theta_n-\theta_0)} \sim e^{-nTc/\tau_c} \tag{9.69}$$

となることである．ただし，τ_c は，

$$\tau_c=\frac{2T}{\log K} \tag{9.70}$$

で与えられる．第2は，I が次の方程式に従ってゆるやかに拡散することである，

$$\frac{\partial f(I,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}D\frac{\partial f(I,t)}{\partial I}. \tag{9.71}$$

ここで，$f(I,t)$ は系の状態の分布関数であり，また，D は拡散係数，

$$D=\frac{1}{T}\varepsilon^2 I^2 \tag{9.72}$$

である．特に，(9.71) 式と (9.72) 式より，$I(t)$ の平均値，

$$\langle I(t)\rangle=\int dI\ If(I,t),$$

を求めると，$\langle I(t)\rangle$ は，

$$\langle I(t)\rangle=\langle I(0)\rangle+\varepsilon^2\frac{t}{T}, \tag{9.73}$$

となる．

これらのことから，いまの古典系の運動が次のようになっていることがわかる．すなわち，時間が短い時間 τ_c 程度経過すると，まず角変数 θ の混合が生じる．時間がさらに長い時間，

$$\tau_D=\frac{2I^2}{D}=\frac{2T}{\varepsilon^2}, \tag{9.74}$$

程度経過すると，作用変数 I の拡散が進行する．なお，τ_c と τ_D との大小関係は (9.70) 式と (9.74) 式との比較により，

$$\frac{\tau_c}{\tau_D}=\frac{\varepsilon^2}{\log K}\ll 1$$

である．量子論的模型 (9.60) 式の古典的極限 (9.64) 式に関する議論のまとめとして，古典系 (9.64) 式の局所的不安定性にふれておく．ストカスティシティの条件 (9.68) 式が，$K\gg 1$ の形で成立しているとしよう．(9.65) 式に注意して，計算を実行すれば，近似的関係式，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_n}{\partial\theta_0}&=\frac{\partial\theta_n}{\partial\theta_{n-1}}\ \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial\theta_{n-2}}\cdots\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_0}\sim K^n\\&=e^{n\log K},\end{aligned} \tag{9.75}$$

が導かれる．

一方，(9.63) 式を用いて，$\partial\alpha_n/\partial\theta_0$ を評価すると，

$$\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta_0}=\frac{\partial\alpha_n}{\partial\alpha_0}\ \frac{\partial\alpha_0}{\partial\theta_0}+\frac{\partial\alpha_n}{\partial\alpha_0^*}\ \frac{\partial\alpha_0^*}{\partial\theta_0}$$

$$=-i\left(\alpha_0\frac{\partial\alpha_n}{\partial\alpha_0}-\alpha_0^*\frac{\partial\alpha_n}{\partial\alpha_0^*}\right)$$

となる．この関係式に次の恒等式，

$$\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta_0}=\frac{\partial|\alpha_n|}{\partial\theta_0}e^{-i\theta_n}-i\alpha_n\frac{\partial\theta_n}{\partial\theta_0}$$

を代入した後に，評価式（9.65）を適用すると，結局，

$$\left|\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta_0}\right|\sim K^n=e^{n\log K},\tag{9.76}$$

という関係が得られる．これは，複素数の振幅 α と α^* が角変数 θ と同種の局所不安定性をもつので，不安定性成長率も同じ値になることを示している．

さて，上述した知識を利用して，いよいよ，$\hat{\mathscr{T}}$ 写像（9.60）式の量子論的補正の分析に移ろう．（9.60）式と（9.61）式に（9.63）式を代入することにより，変数 (I,θ) の写像の $\hbar^2$ と ε^2 までの展開式として，

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=I_n(1+2\varepsilon\sin\theta_n+\varepsilon^2)+4\hbar\mu T\beta_n(\Delta I)_\hbar,\\ \theta_{n+1}&\approx\theta_n+(\omega+\hbar\mu)T+2\mu TI_{n+1}+2\hbar\mu T\beta_n(\Delta\theta)_\hbar.\end{aligned}\tag{9.77}$$

が得られる．ここで，量子論的補正項に対応する $(\Delta I)_\hbar$ と $(\Delta\theta)_\hbar$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned}(\Delta I)_\hbar&=-I_n[\sin\theta_n+\cos\theta_n+\varepsilon(2+2\cos2\theta_n-\sin2\theta_n-\cos\theta_n)],\\ (\Delta\theta)_\hbar&=1+2\varepsilon^2(1+\sin^2\theta_n),\end{aligned}\tag{9.78}$$

であり，また，パラメーター β_n は

$$\beta_n=\frac{1}{4}\frac{I_n}{I_0}\left(\frac{\partial\theta_n}{\partial\theta_0}\right)^2\tag{9.79}$$

を表わす．（9.77）式より（9.79）式までの各式から明らかなように，量子論的補正項は全て β に比例している．β の値を評価するために，強いストカスティシティの条件，$K\gg1$ が成り立つ場合を考えよう．まず，変数 I については，

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{I_0}&=\frac{I_n}{I_{n-1}}\cdot\frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}\cdots\frac{I_1}{I_0}=\exp\left(\sum_{m=0}^{n-1}\log\frac{I_{m+1}}{I_m}\right)\\ &=\exp\left[\sum_{m=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{\Delta I_m}{I_m}\right)\right]\approx\exp\left(\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Delta I_m}{I_m}\right).\end{aligned}\tag{9.80}$$

が成り立つ．ただし，ΔI_m は，

$$\Delta I_m=I_{m+1}-I_m\ll I_m,$$

である．この ΔI_m は一般に角変数 θ の関数である．それ故，（9.80）数の指数部分は多数の乱雑な項についての総和になる．大数の法則によって，その総和は

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{\Delta I}{I_m}\to n\frac{\langle\langle\Delta I\rangle\rangle}{I_n},\tag{9.81}$$

と置き換えることができる．ただし，二重括弧《…》は角変数 θ_m についての平均をとることを意味する．(9.75) 式と (9.80) 式および (9.81) 式を使って (9.79) 式の β を評価すると，結局，次式が得られる，

$$\beta_n \sim \frac{1}{4}\exp\left[n\left(2\log K+\frac{\langle\langle \Delta I\rangle\rangle}{I_n}\right)\right]$$
$$\sim\frac{1}{4}e^{2n\log K}=\frac{1}{4}e^{4t_n/\tau_c},\quad t_n\equiv nT. \tag{9.82}$$

以上の分析によって，$\hat{\mathscr{T}}$ 写像 (9.60) の量子論的補正項は時間の経過とともに指数関数的に増大することがわかる．そして，そのときの成長率は，対応する古典系の局所不安定性の成長率と同程度である．そうすると，写像の方程式 (9.60) 自体，あるいは (9.77) 式の正当性が短時間のうちに失われる可能性がある [131]．この点を考察するためには，これまでとは異なった分析が必要である．

量子論的補正項が発散する原因は，これまでの分析では初期値についての微分係数を取り扱ってきた点にある．この微分係数は，はじめ $\hat{\mathscr{D}}$ の形式 (9.40) に現われ，それがまた $\hat{\mathscr{T}}$ 写像の量子論的補正の各項に出てきている〔(9.61) 式を見よ〕．この $\mathscr{D}$ 形式に類似した表式は流体力学においても見られる．これは，流体力学の方程式をオイラー形式からラグランジュ形式に変換するときに現われる．この類似性は次の様な意味で当然なものである．事実，量子力学の運動方程式は媒質についての運動方程式に対応するのに対して，射影 α と α^* の方程式は流体粒子の運動方程式に対応している．したがって，$\hat{\mathscr{D}}$ 形式が量子論的補正項に現われることは，量子論的"流体"の時間発展についての情報が (9.60) 式または (9.77) 式のなかに保存されることを反映している．他方，波束が拡がってゆく状況（液滴の拡散）は，(9.42) 式の様な多項式で記述されるものではなく，局所不安定性のために時間とともに指数関数的に発展する性格のものである．これを以下で簡単な計算を用いて説明しよう．

(9.77) 式と (9.78) 式によると，もしも，不等式，

$$\hbar\mu T\beta=\zeta\beta\ll 1 \tag{9.83}$$

が成り立つならば，量子論的補正項は小さい値にとどまる．ただし，(9.83) 式のパラメーター ζ は (9.52) 式で導入されたものである．(9.83) 式に (9.82) 式の β を代入すると，

$$t\ll t_\hbar=\frac{1}{4}\tau_c\log\frac{1}{\zeta}\sim\frac{T}{2\log K}\log\frac{1}{\hbar\mu T}, \tag{9.84}$$

を得る．この式で定義される時間 $t_\hbar$ には次の様なはっきりした物理的意味が与

えられる．すなわち，$t_\hbar$ は，波束が拡がってしまうまでの時間である．これは次の考察からわかる．角変数の局所不安定性から，次式が成り立つ〔(9.75) 式を見よ〕，

$$\Delta\theta(t)\sim\Delta\theta_0 \exp\frac{t}{\tau_c}. \tag{9.85}$$

ここで，$\Delta\theta_0$ は，最初の T 秒間の写像のときに生じる角変数の不確定量である．これにともなう作用変数の不確定量を ΔI_0 におくと，

$$\Delta\theta_0\sim T\left|\frac{d\omega(I)}{dI}\right|\Delta I_0$$

が成り立つ．ΔI_0 として最小の値 $\hbar$ をとると，

$$\Delta\theta_0\gtrsim T\left|\frac{d\omega(I)}{dI}\right|\hbar\sim\hbar\mu T$$

となる．この関係式を (9.85) 式に代入すれば，次式が得られる，

$$\Delta\theta(t)\gtrsim\hbar\mu T\exp\left(\frac{t}{\tau_c}\right).$$

この関係式に，波束が完全に拡散する条件，

$$\Delta\theta(t)\sim 2\pi,$$

を代入して，時間 t を求めると，この時間が (9.84) 式の $t_\hbar$ と一致することが確かめられる．(9.83) 式と (9.84) 式によれば，この時間 $t_\hbar$ は，また，$\mathcal{T}$ 写像の量子論的補正項が 1 の程度までに増大するまでの時間でもある．

さて，不等式 (9.84) の議論に戻ろう．写像 1 回あたりの作用変数 I の増分を ΔI とおくと，$\Delta I/I$ は近似的に ε の程度である．摂動の 1 回の衝撃に含まれる量子の数を表わす量として次のパラメーター κ を導入する，

$$\kappa=\frac{\Delta I}{\hbar}\sim\varepsilon\frac{I}{\hbar}. \tag{9.86}$$

明らかに，準古典近似が有効であるのは，不等式，

$$\kappa\gg 1, \tag{9.87}$$

が成り立つときである．この不等式 (9.87) は不等式 $I/\hbar\gg 1$ よりも強い条件である．(9.66) 式，(9.67) 式と (9.86) 式により，(9.52) 式で定義されたパラメーター ζ は次のように書き換えられる，

$$\zeta=4K/\kappa. \tag{9.88}$$

量子論的運動とそれの $\hbar\to 0$ の古典的極限との関係を論じるとき，このパラメーター ζ が極めて重要な役割を果たすことを以下の議論で示そう．そのために，

新たに1つの考え方を採用する．もしも，ある系の演算子の期待値とこれに対応する古典量との差（補正項）がある時間の間小さな値に留まるならば，その時間の間はこの系に対して有効となる準古典近似が存在すると考える．我々は以前に，ハミルトニアン（9.42）式をもつ安定系の例で，時間間隔 T の間，準古典近似が有効であるための条件は，不等式，

$$\zeta \ll 1 \tag{9.89}$$

が成り立つことであることを見た〔(9.52) 式を参照〕．また，9.4節の最後の所で，波束の拡がりについての一般的考察から安定な系に対して同じ結論が得られた．量子論的 K 系の場合も同じ条件，(9.89) 式が現われることを証明しよう．古典的 K 系の最小の特性的時間は，位相空間で混合が生じる時間 τ_c である．つまり，時間 t が

$$t \gg \tau_c$$

でありさえすれば，系のストカスティシティが現われる．この条件と，系のストカスティシティが古典近似で記述できる時間間隔を規定する条件（9.84）式とを両立させると，再び，(9.89) 式が得られる．

もしも，"ストカスティシティ"という言葉を古典系で定義された意味でのみ使用し，かつ，不等式，

$$\zeta \gg 1 \tag{9.90}$$

が成り立つならば，系の運動は本質的に量子論的法則によって支配されると考えられる．言い換えれば，いわゆる準古典近似が有効であるための"通常の"条件(9.87)〔量子数が大きいという条件〕が満たされているにも拘わらず，不等式(9.90) が成り立つ場合には古典近似の値は演算子の期待値から完全にはずれてしまうのである．以上の議論から，ストカスティシティの量子論的しきい値を表現する関係式として，表式 $\zeta \approx 1$ をとってよいことがわかる．

議論がここまでくると，古典近似が多少なりとも有効であるための条件として，不等式（9.87）式のほかに条件式（9.89）が必要であることに何故最初から気づかなかったのか不思議に思われるかもしれない．この点は，次の事情を考えれば理解できる．ζ に対する表式（9.88）に注目しよう．安定な力学系（$\hbar=0$ の場合）では，パラメーター K が $K<1$ を満たす．それ故，準古典近似のための条件（9.87）が成りたてば，不等式（9.89）は自動的に満たされるのである．

ところが，量子論的 K 系の場合には，K が一般的に1よりも大きくなるので，たとえ，不等式（9.87）が成り立つとしても，比 K/κ は不定である．したがっ

て，量子論的 K 系においては ζ が意味のあるパラメーターになるのである．

以上の分析から，量子論的 K 系の場合には，時間がある期間経過すると，準古典的な取り扱いが無意味になることがわかる．その期間のあとの量子論的 K 系は，これまでとは全く異なった完全に量子論的な考察によって分析される必要がある．

第 9 章に関する注釈

1. N.S. クリロフは，古典系の混合性の条件を考察しているが，同時に，量子系の条件の分析も手がけている [33]．散乱による波動関数の変化を分析することによって，剛体球の量子ガスのストカスティシティが文献 [140] で調べられている．高エネルギー現象での粒子の多重発生に関連した多くの実験事実を説明するために，文献 [140] と同様の研究も行われている [141]．文献 [142] と [143] では，ストカスティシティの条件を満たす系のエネルギースペクトルについて定性的な議論が種々なされている．また，文献[70]，[131，132]，[144，145] においては，量子論的 K 系の定式化がなされ，いろいろな問題が分析されている．なお，量子系のストカスティシティに関する研究の総合報告は文献 [17, 18] にみられる．文献 [146] と [147] では，量子論的 K 系の運動が数値計算によって分析されている．

10章 量子系のストカスティシティ 非定常問題（そのII）

前の章の結果から，安定な系（$K\ll1$）と不安定な系（$K\gg1$）の両者の場合に，波動関数自体の運動と演算子の期待値の運動との違いが明確になった．また，そこでの分析によって，$\zeta\ll1$の場合，系の振舞が近似的に古典的であり，かつ，量子論的補正項が小さな値に留まるような時間間隔が存在することもわかった．言い換えれば，その時間の間では，準古典近似が適用可能であり，系の性質が，対応する古典的K系の性質に近いのであった．

この章では，量子論的補正項が小さい値に留まる期間のあとの量子論的K系を考察する．

10.1 波動関数の量子論的写像

写像の公式，期待値の計算，一般論への拡長．

我々は，すでに（9.2節を参照），シュレディンガー表示における波動関数の量子論的写像の導出方法を知っている〔(9.10) 式を見よ〕．しかし，この写像の表式の中では，演算子が複雑に入り込んでおり，それを“解きほどく”ためにはこの写像を直接的に利用するのは得策でない．それで，この方法を改良することを考えよう［148］（注釈1を参照）．

系のハミルトニアンとして，再度（9.53）式で与えられるものをとる．方程式(9.10) にこのハミルトニアンを代入すれば，写像

$$\psi_{n+1}=\exp\left[-i\varepsilon(a^{+}+a)\right]\exp\left[-i(\omega a^{+}a+\hbar\mu(a^{+}a)^{2})T\right]\psi_{n}. \qquad (10.1)$$

が得られる．初期状態として，次のコヒーレント状態をとろう，

$$\psi_0=|\alpha_0\rangle.$$

展開公式（9.27）式を用いて，演算子 $\exp(-iH_0T/\hbar)$ が任意のコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に作用した結果を展開すると，次のようになる，

$$e^{-(i/\hbar)\hat{H}_0T}|\alpha\rangle=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{(m!)^{1/2}}\times e^{-i(m\omega+\hbar\mu m^2)T}|m\rangle. \qquad (10.2)$$

ただし，$\hat{H}_0$ は

$$\hat{H}_0=\hbar\omega a^+a+\hbar^2\mu(a^+a)^2.$$

である．いま，ξを変数とする1つの関数，

$$\Gamma(\xi)=(4i\pi\hbar\mu T)^{-1/2}\exp\left(\frac{i\xi^2}{4\mu\hbar T}\right),$$

を導入すれば，(10.2) 式の $\exp(-i\hbar\mu Tm^2)$ を次の積分表示で表わすことができる，

$$e^{-i\hbar\mu Tm^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\Gamma(\xi)e^{-im\xi}. \tag{10.3}$$

また，記号の簡略化のために，ここで，次の積分演算を意味する記号を定義しておこう，

$$\hat{\Gamma}\ (\xi)\ (\cdots)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \Gamma\ (\xi)\ (\cdots),$$

$$\hat{\Gamma}^*(\eta)\ (\cdots)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\ \Gamma^*(\eta)\ (\cdots). \tag{10.4}$$

(10.2) 式に積分表示 (10.3) を代入した結果を，(10.4) 式の記号を用いて表わすと，(10.2) 式は次のようになる，

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H_0T}|\alpha>=\hat{\Gamma}(\xi)|\alpha\ e^{-i(\omega T+\xi)}> \tag{10.5}$$

一方，(9.28) から得られる関係式，

$$\begin{aligned}\exp\left[-i\varepsilon(a^++a)\right]|\delta>&=\hat{D}(-i\varepsilon)|\delta>\\&=\hat{D}(-i\varepsilon)D(\delta)|0\rangle,\end{aligned}$$

は，公式 (9.29) 式を用いると，次式に書き換えられる，

$$e^{-i\varepsilon(a^++a)}|\delta>=e^{-\frac{1}{2}i\varepsilon(\delta+\delta^*)}|\delta-i\varepsilon\rangle. \tag{10.6}$$

(10.5) 式の左辺と (10.6) 式の右辺の演算子の積がちょうど写像 (10.1) 式の演算子になっている．このことに注意すれば，ψ_0 の1回写像 ψ_1 が容易に次の形に書ける，

$$\begin{aligned}\psi_1=\hat{\Gamma}(\xi)\exp&\left[-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha_0\ e^{-i(\omega T+\xi)}+\alpha_0^*\ e^{i(\omega T+\xi)})\right]\\&\times|\alpha_0e^{-i(\omega T+\xi)}-i\varepsilon\rangle.\end{aligned} \tag{10.7}$$

同じように，ψ_2 を $\psi_0=|\alpha_0\rangle$ で表わすことができる，以下，$\psi_3,\psi_4\cdots$ についても同様である．この反復操作を n 回実行すれば，次の表式が得られる，

$$\psi_n=\prod_{j=1}^{n}\hat{\Gamma}(\xi_j)\exp\left[-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha\{\xi_j\}+\alpha^*\{\xi_j\})\right]|\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon\rangle. \tag{10.8}$$

ただし，記号 $\alpha\{\xi_j\}$ は次のように定義される，

$$\alpha\{\xi_0\}=\alpha_0,\quad \alpha\{\xi_1\}=\alpha_0\exp[-i(\omega T+\xi_1)],$$
$$\alpha\{\xi_j\}=(\alpha\{\xi_{j-1}\}-i\varepsilon)\exp[-i(\omega T+\xi_j)],\ (j\geq 2). \tag{10.9}$$

公式（10.8）を使うと，演算子を変数とする任意の関数 $A(a_0^+, a_0)$ の時刻 $t_n=nT+0$ における期待値，

$$\langle A(a_0^+, a_0)\rangle_n = Tr(\psi_n^+ A(a_0^+, a_0)\psi_n)$$
$$= Tr(\psi_n^+ A^{(N)}(a_0^+, a_0)\psi_n),$$

を計算することが可能である．実際に，この表式の ψ_n に（10.8）式を代入すると，$\langle A(a_0^+, a_0)\rangle$ に対する表式，

$$\begin{aligned}\langle A(a_0^+, a_0)\rangle_n=&\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\hat{\Gamma}^*(\eta_k)\hat{\Gamma}(\xi_j)\\ &\times\exp\left[\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha\{\eta_k\}+\alpha^*\{\eta_k\})-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha\{\xi_j\}+\alpha^*\{\xi_j\})\right]\\ &\times A^{(N)}(\alpha^*\{\eta_n\}+i\varepsilon,\ \alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon)\\ &\times\langle\alpha\{\eta_n\}-i\varepsilon|\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon\rangle.\end{aligned} \tag{10.10}$$

が導かれる．（10.10）式の1例として，とくに，演算子 a_0^+ の期待値を考えると，$\langle a_0\rangle_n$ に対する表式，

$$\begin{aligned}\langle a_0\rangle_n=\alpha_n=&\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\hat{\Gamma}^*(\eta_k)\hat{\Gamma}(\eta_j)[\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon]\\ &\times\exp\left[\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha\{\eta_k\}+\alpha^*\{\eta_k\})-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha\{\xi_j\}+\alpha^*\{\xi_j\})\right]\\ &\times\langle\alpha\{\eta_n\}-i\varepsilon|\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon\rangle,\end{aligned} \tag{10.11}$$

が得られる．この表式はもう少し簡潔な形に書き換えることができる．まず，(9.30) 式を使って，行列要素 $\langle\alpha\{\eta_n\}-i\varepsilon|\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon\rangle$ を計算する．その結果を，漸化式（10.9）から得られる関係式，

$$|\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon|^2=|\alpha_0|^2+\varepsilon^2 n+i\varepsilon\sum_{l=1}^{n}(\alpha\{\xi_l\}-\alpha^*\{\xi_l\}), \tag{10.12}$$

を用いて，整理すれば，(10.11) 式は，

$$\begin{aligned}\alpha_n=&e^{-|\alpha_0|^2-\varepsilon^2(n-1)}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\hat{\Gamma}^*(\eta_k)\hat{\Gamma}(\xi_j)[\alpha(\xi_n)-i\varepsilon]\\ &\times\exp\left[-i\varepsilon\sum_{l=1}^{n-1}(\alpha\{\xi_l\}-\alpha^*\{\eta_l\})+\alpha^*\{\eta_n\}\alpha\{\xi_n\}\right].\end{aligned} \tag{10.13}$$

に書き換えられる．

表式（10.13）は，確かに，初期条件（α_0）の関数として，時刻 t_n+0 における演算子 a_0 の期待値（α_n）を表現している．しかしながら，α_n を α_{n-1} のみで

表わす漸化関係は存在しない．この点が古典的極限の場合と質的に異なるところである（注釈2を参照）．

一方，時刻 t_n+0 の古典的作用変数に対応する量，

$$I_n=Tr(\psi_n^+ a_0^+ a_0 \psi_n) \tag{10.14}$$

を考えよう．一般的な公式（10.10）と漸化式（10.9）を用いて計算すると，関係式，

$$I_{n+1}=I_n+i\varepsilon(\alpha_n-\alpha_n^*)+\varepsilon^2 \tag{10.15}$$

が得られる．上式は，2つの異なった時刻の I の値を関係づける漸化式になっている．

この節の締めくくりとして，これまでの定式化を，より一般的なハミルトニアンの系にも適用できるように拡張して置こう．

系の元の古典的ハミルトニアン（9.5）式を，

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(q)T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT), \tag{10.16}$$

の形に取ろう．ここで，I は系の古典的作用変数である．この古典的ハミルトニアンに対応する量子論的ハミルトニアンは，

$$\hat{H}=\hat{H}_0(a^+a)+\varepsilon\hat{V}(a^++a)T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT), \tag{10.17}$$

の形になる．この節でこれまでに導いた量子論的写像は，$\hat{H}_0$ と $\hat{V}$ が次の特殊な形にとられた場合に相当する，

$$\hat{H}_0(a^+a)=\hbar\omega a^+a+\hbar^2\mu(a^+a)^2$$

$$\hat{V}(a^++a)=\frac{\hbar}{T}(a^++a).$$

$\hat{H}_0$ が a^+a の任意の関数で，かつ，$\hat{V}$ が a^++a の任意の関数である場合にも，適当なフーリエ変換を利用すると，上述と類似の写像を導くことができる．以下で，その大筋と結論を述べよう．

粒子数演算子 a^+a の固有状態を $|m\rangle$ で表わし，$\hat{H}(a^+a)$ の固有値を $E(m)$ で表わす，すなわち，

$$\hat{H}_0(a_0^+a_0)|m\rangle=E(m)|m\rangle$$

であるとする．演算子 $\exp(-iH_0T/\hbar)$ がコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ に作用した結果は，（10.3）式と（10.4）式からの類推により，

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H_0T}|\beta\rangle\equiv\hat{\boldsymbol{T}}_0|\beta\rangle=\Gamma_0(\xi)|\beta e^{-i\xi}\rangle, \tag{10.18}$$

と書ける，ただし，$\hat{\Gamma}_0(\xi)$ は，

$$\Gamma_0(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int dz\, e^{-\frac{i}{\hbar}F(z)T+iz\xi}, \qquad (10.19)$$

を積分核とする積分演算子である．同様にして，演算子 $\exp[-i\varepsilon\hat{V}(a^{+}+a)]$ は，

$$e^{-i\varepsilon V(a^{+}+a)}\equiv\hat{T}_{\varepsilon}=\int d\bar{\xi}\Gamma_{\varepsilon}(\bar{\xi})\, e^{-i(a^{+}+a)\bar{\xi}}, \qquad (10.20)$$

となる．ただし，$\Gamma_{\varepsilon}(\bar{\xi})$ は，

$$\Gamma_{\varepsilon}(\bar{\xi})\equiv\frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{-i\varepsilon V(x)+i\bar{\xi}x}$$

である．あるコヒーレント状態 $|\delta>$ に摂動演算子 $\hat{T}_{\varepsilon}$ が作用した結果は，（10.6）式を考慮すれば，

$$\hat{T}_{\varepsilon}|\delta>=\hat{\Gamma}_{\varepsilon}(\bar{\xi})\exp\left[-\frac{1}{2}i\bar{\xi}(\delta+\delta^{*})\right]|\delta-i\varepsilon>. \qquad (10.21)$$

と書ける．時間を T だけ移動させる演算子 $\hat{T}$ は，$\hat{T}_0$ と $\hat{T}_{\varepsilon}$ との合成なので，$\hat{T}$ が $\psi_0=|\alpha_0>$ に作用した結果は次のようになる，

$$\begin{aligned}\psi_1&=\hat{T}\psi_0=\hat{T}|\alpha_0>=\hat{T}_{\varepsilon}\hat{T}_0|\alpha_0>\\&=\hat{\Gamma}(\xi,\bar{\xi})\exp\left[-\frac{1}{2}i\bar{\xi}(\alpha_0e^{-i\xi}+\alpha_0^{*}e^{i\varepsilon})\right]\times|\alpha_0e^{-i\xi}-i\bar{\xi}\rangle \qquad (10.22)\end{aligned}$$

ここで，$\Gamma(\xi,\bar{\xi})$ は，

$$\hat{\Gamma}(\xi,\bar{\xi})\equiv\hat{\Gamma}_{\varepsilon}(\bar{\xi})\hat{\Gamma}_0(\bar{\xi}),$$

である．この表式（10.22）は（10.7）式の一般化になっている．　この演算を n 回反換すれば，写像（10.18）式を一般化した表式として，

$$\begin{aligned}\psi_n=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\xi_j,\bar{\xi}_j)\exp&\left[-\frac{i}{2}\varepsilon(\alpha\{\xi_j,\bar{\xi}_j\}+\alpha^{*}\{\xi_j,\bar{\xi}_j\})\right]\\&\times\bar{\alpha}(\xi_j,\bar{\xi}_j)> \qquad (10.23)\end{aligned}$$

が得られる，ここで，（10.9）式に対応する漸化式は，

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}\{\xi_0,\bar{\xi}_0\}=\alpha_0\\&\bar{\alpha}\{\xi_j,\bar{\xi}_j\}=\bar{\alpha}\{\xi_{j-1},\xi_{j-1}\}e^{-i\xi_j}-i\bar{\xi}_j\\&\alpha\{\xi_j,\bar{\xi}_j\}=\bar{\xi}(\bar{\alpha}\{\xi_j,\bar{\xi}_j\}+i\bar{\xi}_j),\ \ j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

で与えられる．

表式（10.18）と（10.23）が，（10.17）式の形のハミルトニアンの場合の求めるべき量子論的写像である．ここでは，初期状態としてあるコヒーレント状態を選んだが，それは本質的なことではない．これは，コヒーレント状態は完全系を構成するので，初期状態として他の状態を選んだとしても，その状態をコヒーレント状態の展開形式で表わすことができるからである．

10.2 量子論的写像の分析

位相相関，局所不安定性，量子論的しきい値，拡散.

公式（10.11）は，時刻 $t_n=nT+0$ における演算子 a の位相空間への射影に対する1つの厳密な表式である．演算子 a^+ の射影に対する表式は（10.11）式の複素共役をとることにより与えられる．主要な物理的情報はこの（10.11）式またはこれを書き換えた（10.13）式に含まれていることを以下の議論で示そう．古典的極限（$\hbar\to 0$）では，（9.69）式の $\mathscr{R}_n$ が系の位相相関を記述する．これに対応して，いま，

$$\alpha_n=|\alpha_n|e^{-i\theta_n}$$

とおいたうえで，次の量，

$$\mathscr{R}_n^\alpha\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_0\alpha_n\alpha_0^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_0|\alpha_n\alpha_0|e^{i(\theta_n-\theta_0)}, \tag{10.24}$$

を考えよう．$K\gg 1$ の場合，一般に，$|\alpha_n|$ は時間的変動が小さい関数なので，（10.24）式で定義された $\mathscr{R}_n^\alpha$ は近似的に

$$\mathscr{R}_n^\alpha\sim\mathscr{R}_n|\alpha_0|^2, \tag{10.25}$$

と書ける．これは，もし（10.24）式の関数 $\mathscr{R}_n^\alpha$ が求まれば，射影 α_n の位相相関が決定されることを意味する．また，$K\gg 1$ の場合には，初期値の取り方によって相関関数が大きく変化することはないであろうから，

$$\mathscr{R}_n^\alpha\sim|\alpha_0|\langle\!\langle\alpha_n\rangle\!\rangle, \tag{10.26}$$

が成り立つ．ここで，二重括弧《…》は以前と同じく位相（角変数）についての平均値を表わす．したがって，（10.11）式を初期位相で平均したものは，時間的にゆっくり変動する部分を別にすれば，量子論的位相相関（角変数の相関）を決定する．つまり，（10.24）～（10.26）式によると，いまの相関関数 $\mathscr{R}_n^\alpha$ は準古典近似の角変数の相関関数に対応することがわかる．

我々は以前に古典的極限（$\hbar\to 0$）の $\mathscr{R}_n$ に対する表式（9.69）を導いた．（10.25）式の $\mathscr{R}_n$ にこの表式を代入すると，関係式，

$$\mathscr{R}_n^\alpha\sim|\alpha_0|^2e^{-nT/\tau_c} \tag{10.27}$$

が得られる．これは，準古典近似が適用可能な時間の範囲でのみ有効な表式であ

る．その時間間隔 $t_\hbar$ は（9.84）式，すなわち，次式で与えられる，

$$t_\hbar=\frac{1}{4}\tau_c\log(1/\zeta).$$

この時間を（10.27）式の nT のところに代入すると，相関関数の減衰の程度の準古典近似による評価が次のように求まる，

$$\mathscr{R}^\alpha_{t_\hbar}\sim\zeta^{1/4}=(\hbar\mu T)^{1/4}. \tag{10.28}$$

このように，$\mathscr{R}^\alpha_n$は，初めは（古典的極限の場合と同じく）指数関数的に減少して，時間が $t_\hbar$ 程度経過すると，$\zeta^{1/4}$ 程度の大きさになる．問題は，時間が $t_\hbar$ を過ぎた後に，$\mathscr{R}^\alpha_n$がどのようになるかである．これを解決するには，表式（10.26）の右辺を決定する必要があり，そのためには期待値《α》は厳密な表式（10.13）から求められなければならない．この計算は，文献［148］でなされているが，かなり煩雑なので，ここでは，その最終結果だけを記しておこう．

$$\mathscr{R}^\alpha_n\geq\frac{\text{定数}}{\sqrt{nK}}. \tag{10.29}$$

このように，相関関数は，$t\sim t_\hbar$ では，（10.28）式の程度の値をとり，そのあとも時間のべき関数以上に速く減衰することがないのである（注釈3を参照）．

時間が長時間経過すると相関関数の減衰が遅くなるということは，量子論的K系の場合，混合性が完全な形では起らないことを意味する．この事実は不確定性関係からの直接的な帰結でもある．不確定性関係の1つの解釈によると，位相空間上で，$\hbar$ 程度の体積要素を1個以上の状態が占めることは不可能である．したがって，位相空間上の各点で全ての状態を完全に“かき混ぜる”ことは不可能であることが理解できよう．

量子論的 K 系のこのような特徴的な性質が，実は，局所不安定性の分析のときにも現われるのである．

古典的極限において局所不安定性を表わす量は $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$ であった〔(9.76)式をみよ〕*.

α_n の厳密な表式（10.13）を用いて，量子論の場合の $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$ を計算すると，次の関係式が得られる，

$$\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta_0}=e^{-|\alpha_0|^2+\varepsilon^2(n-1)}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\hat{\Gamma}^*(\eta_k)\Gamma(\xi_j)Q$$

* 局所不安定性は，いまの場合で言うと，次の性質であったことを思い出そう．わずかに異なった初期条件 θ_0 の2つの軌道に属する2つの振幅 α_n を考えるとき，その2つの振幅の差が時間の経過とともに指数関数的に増大するという性質である．

$$\times\exp\left(-i\varepsilon\sum_{l=1}^{n-1}(\alpha\{\xi_l\}-\alpha^*\{\eta_l\}+\alpha^*\{\eta_n\}\alpha\{\xi_n\}\right), \tag{10.30}$$

ただし，Q は次式で定義される量である，

$$Q\equiv\frac{\partial\alpha\{\xi_n\}}{\partial\theta_0}+(\alpha\{\xi_n\}-i\varepsilon)\left[-i\varepsilon\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\alpha\{\xi_l\}}{\partial\theta_0}-\frac{\partial\alpha^*\{\eta_l\}}{\partial\theta_0}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\alpha^*\{\eta_n\}}{\partial\theta_0}\alpha\{\xi_n\}+\alpha^*\{\eta_n\}\frac{\partial\alpha\{\xi_n\}}{\partial\theta_0}\right]. \tag{10.31}$$

(10.30) 式の右辺を評価するため，まず，定義式 (10.9) を用いて，(10.31) 式の $\partial\alpha\{\xi_l\}/\partial\theta_0$ と $\partial\alpha^*\{\xi_l\}/\partial\theta_0$ の微分を実行する．その結果を，補助的記号，

$$P_l(\xi)\equiv e^{-il\omega T-i(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_l)}$$

を用いて表わすと，

$$\frac{\partial\alpha\{\xi_l\}}{\partial\theta_0}=P_l(\xi)\frac{\partial\alpha_0}{\partial\theta_0},$$
$$\frac{\partial\alpha^*\{\xi_l\}}{\partial\theta_0}=P_l^*(\xi)\frac{\partial\alpha_0^*}{\partial\theta_0}. \tag{10.32}$$

となる．(11.31) 式と (10.32) 式を (10.30) 式に代入して得られる表式と α_n の表式 (10.11) 式を比較する，このとき，任意の l で $|P_l|=1$ であることに注意すれば，次の評価式が得られる，

$$\left|\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta_0}\right|\leq\text{定数}\times\varepsilon n|\alpha_n|. \tag{10.33}$$

この評価式も，量子論の場合の微分係数 $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$ が時間 n のべき関数以上に速く増大することはないことを示している．それ故，この場合も，長い時間の間指数関数的に成長するような局所不安定性は存在しないことになる．これと等価な表現は，量子論的な期待値の運動のコルモゴロフエントロピーはゼロである，ということである (注釈 4 を参照)．この事実は，また，量子系に特有な相関の存在を示唆している．

期待値 (α,α^*) の時間的変動が量子論的効果によって古典的法則からずれることをもっと明瞭な形で示す定式化も可能である．

それを示すために，$n=1$ にとった関係式 (10.13) を ξ_1 と η_1 について積分して得られる表式，

$$\alpha_1=\exp[-i(\omega+\hbar\mu)T-(1-e^{-2i\hbar\mu T})|\bar{\alpha}_0|^2]\times\bar{\alpha}_0,$$
$$\bar{\alpha}_0\equiv\alpha_0-i\varepsilon \tag{10.34}$$

を考えよう．この表式を見ると，(9.52) で定義されたパラメーター，

$$\zeta=\hbar\mu T, \tag{10.35}$$

の重要性がわかる．もしも．$\zeta \ll 1$ であるならば，(10.34) 式の ζ についてのべき展開が可能である．その場合，(10.34) 式は，$\hbar\mu T$ 程度の補正項をもった古典的な写像の式に移行する．この近似的な手続きを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ に適用すれば，これらの補正項が速かにある値に収束するであろう．一方，$\zeta \gtrsim 1$ の場合には，量子論的効果が写像の第1段階ですでに本質的な役割を果すことが (10.34) 式からわかる．この場合の運動は古典的な運動とは質的に異なっている．したがって，(10.34) 式は，量子論的効果の支配的な領域とそれの小さい領域とが，条件，

$$\zeta \approx 1 \tag{10.36}$$

を満たす境界（しさい値）でわけられることを示している．これと同じ条件は，定性的にではあるが，すでに 9.5 節で導かれている．しかし，ここで得られた条件 (10.36) 式は，厳密な表式 (10.34) から求められたものであることを強調しておく．

量子論的 K 系の準古典近似が有限時間（あまりには短くない時間）で有効であるための条件は，不等式 $\zeta \ll 1$ が成り立つこと，または (9.88) 式を用いて言えば，不等式 $K \ll \kappa$ が成り立つことであった．他方，物理系が K 系であるための条件は不等式 $K \gg 1$ が成り立つことである．これら2つの条件を組み合せると，不等式，

$$\kappa \gg K \gg 1, \tag{10.37}$$

が得られる．この (10.37) 式は，量子論的 K 系の運動が長時間古典系の運動と近似的に同じになるためのパラメーター間の関係を表わしている．

ところで，量子系では，小さい有限の大きさの相関の存在が，変動の“遅い”変数 I_n の拡散過程にかなりの影響をおよぼす．(10.14) 式によると，この変数は古典系の作用変数 I に対応する量である．作用変数 I の乱雑でゆるやかな変動は拡散方程式 (9.71) で記述される．また，(9.73) 式によると，I の平均値 $\langle I(t)\rangle$ は，

$$\langle I(t)\rangle = I(0) + \varepsilon^2 \frac{t}{T}, \tag{10.38}$$

で与えられる．

つぎに，これらの量を量子論的に調べる問題に移ろう．厳密な漸化式 (10.15) から，関係式，

$$I_n = I_0 + \varepsilon^2 n + i\varepsilon \sum_{m=1}^{n-1} (\alpha_m - \alpha_m^*)$$

が導かれる．この式の初期位相 θ_0 についての平均値をとると，

$$\langle\!\langle I_n \rangle\!\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_0 I_n$$

$$= I_0 + \varepsilon^2 n + i\varepsilon \sum_{m=1}^{n-1} (\langle\!\langle \alpha_m \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \alpha_m^* \rangle\!\rangle) \tag{10.39}$$

が得られる，ただし，$\langle\!\langle \alpha_m \rangle\!\rangle$ は，

$$\langle\!\langle \alpha_m \rangle\!\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_0 \alpha_m \tag{10.40}$$

である．試みに，古典的極限を考えると，(10.39) 式の $(\langle\!\langle \alpha_m \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \alpha_m^* \rangle\!\rangle)$ の部分は消える，また，$n = t/T$ であるので，(10.39) 式は (10.38) 式に移行する．しかし，量子論の場合には，(10.26) 式からも明らかなように，$\langle\!\langle \alpha_m \rangle\!\rangle$ は相関関数 $\mathscr{R}_m^\alpha$ に比例する．この相関関数が指数関数的に減少するのは，時間が $t < t_\hbar$ の間だけであった．それ故，その時間の間だけ，$\langle\!\langle I(t) \rangle\!\rangle$ の時間発展は，

$$\langle\!\langle I(t) \rangle\!\rangle \approx I_0 + \varepsilon^2 \frac{t}{T}, \quad t < t_\hbar. \tag{10.41}$$

と書ける．これは古典的表式 (10.38) と一致する．しかしながら，$t > t_\hbar$ では，相関関数 $\mathscr{R}_n^\alpha$ は (18.29) 式にしたがって変動する．このとき，$\langle\!\langle \alpha_m \rangle\!\rangle$ $(m = 1, 2, \cdots, n-1)$ の個々の値は小さいが，(10.39) 式にはこれらの総和が寄与するので，その累積効果が $\langle\!\langle I(t) \rangle\!\rangle$ の漸近的振舞いに本質的な影響を与える可能性がある．この影響を評価するには，相関関数 $\mathscr{R}_n^\alpha$ の減衰過程を (10.29) 式よりもさらに詳しく調べる必要がある（注釈 5 参照)．

10.3　量子論的共鳴間の相互作用

外場中の量子論的非線型共鳴，有効ハミルトニアン，2 個の重複共鳴の間の相互作用，重複共鳴のストカスティシティに関する数値解析．

典型的な古典系の場合には，ストカスティシティのための条件がチリコフの示唆による共鳴の重複条件 (4.29) 式（チリコフの重複条件）と一致することを 4.2 節でみた．つまり，個々の共鳴幅が最隣接の 2 つの共鳴の間隔と同程度になると運動が乱雑（不規則）になった．それで，これと同じ状況を量子論的に考察しておくことは有意義なことであろう．

まず，1 個の孤立した非線型共鳴の場合から始めよう．ハミルトニアン H_0 の非線型系に周期的な力が作用する物理系を考え，全ハミルトニアンが次の形で与

えられるとする [208],

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}\cos\nu t. \tag{10.42}$$

非線型系の無摂動ハミルトニアン H_0 の固有値と固有関数を，それぞれ，E_n と ϕ_n で表わすと，定常状態のシュレディンガー方程式は，

$$\hat{H}_0\phi_n=E\phi_n, \tag{10.43}$$

と書ける．古典系の分析（第 1.3 節）からの類推で，次のような状況を考察しよう．すなわち，量子数 n_0 の準位の近傍の無摂動状態が遷移するとき，その遷移振動数 ω_{n0} が外部からの摂動の振動数 ν とほぼ同じ大きさになるような状況である．つまり，

$$\hbar\nu\approx\hbar\omega_{n_0}\equiv E_{n_0+1}-E_{n0} \tag{10.44}$$

が成り立つ場合を考える．さらに，量子数 n_0 が大きい（$n_0\gg1$）と仮定しよう．これは準古典的な状況に対応する．摂動の振動数と共鳴する遷移過程を取り扱うには物理系をもう少し具体的に規定しておく必要がある．無摂動系の非調和性が大きい場合には，エネルギースペクトル E_n は等間隔でなくなる．したがって，共鳴条件（10.44）式を満たす2つの無摂動状態以外の無摂動状態は外部からの摂動と共鳴しない．この場合には量子数 n_0 と n_0+1 をもつ2つの準位間の遷移過程だけを考慮すれば十分である．もう一方の極端な場合は，無摂動系の非調和性が小さく，エネルギースペクトル E_n がほとんど等間隔になるときである．この場合には，主遷移（$n_0\rightleftarrows n_0+1$）の近くの数多くの無摂動状態が共鳴条件を満たすので，これらの数多くの共鳴遷移を同時に取り扱わなければならない．我々は以下でこの後者の場合を考察する．

量子数 n_0 の近傍で，共鳴に実質的に関与す準位の数を Δn で表わそう．これは，$n_0-\Delta n$ から $n_0+\Delta n$ までの量子数をもつ準位のの隣りどおしの遷移振動数が，摂動の振動数 ν と同程度であることを意味する．いま，このときの数 Δn が不等式，

$$n_0\gg\Delta n\gg1 \tag{10.45}$$

を満たすものと仮定する．さらに，次の2つの無次元パラメーターを導入しておく，

$$\varepsilon=\frac{2V_{n0,\,n0+1}}{n_0\hbar\omega_0},\quad \mu_0=\frac{n_0E''_{n0}}{\hbar\omega_{n0}}. \tag{10.46}$$

ただし，上式において，$V_{n0,\,n0+1}$ は次式のように通常の方法で定義された摂動の行列要素である，

$$V_{n,n+1}=\langle\psi_n|\hat{V}|\psi_{n+1}\rangle$$

また，E_{n_0}に付いている2重ダッシ記号″は E_{n_0} を n_0 で2回微分することを意味する．ε は摂動の強さを表わす量であり，μ_0 は非線型性（エネルギースペクトルの非調和性）を表わすパラメーターである．これらのパラメーターは，古典系の場合に1.3節で導入したパラメーター ε と α に対応する．古典系の場合の（1.26）式に対応して，今度の場合も ε と μ_0 の間に，

$$\varepsilon\ll\mu_0\ll\frac{1}{\varepsilon} \qquad (10.47)$$

の大小関係があるものとしよう．

分析の準備は以上で完了したので，いよいよ(10.42)式で表わされる系の分析に移ろう．まず，系全体の波動関数 $\psi(x,t)$ を無摂動系の固有関数で次の形に展開しよう，

$$\psi(x,t)=\sum_n c_n\psi_n(x)\exp\left[-i\left((n-n_0)\nu+\frac{1}{\hbar}E_{n_0}\right)t\right]. \qquad (10.48)$$

この展開式（10.48）をシュレディンガー方程式，

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=(\hat{H}_0+\hat{V}\cos\nu t)\,\psi(x,t),$$

に代入した後，$\psi_n(x)$ の直交性を利用して整理する，その時，摂動項と共鳴する項だけを残すようにすると，

$$i\hbar\dot{c}=w_nc_n+\frac{1}{2}V_{n,n+1}c_{n+1}+\frac{1}{2}V_{n,n-1},c_{n-1}, \qquad (10.49)$$

の関係が得られる．ここで，w_n は次式で定義される，

$$w_n=(E_n-E_{n_0})-\hbar\nu(n-n_0). \qquad (10.50)$$

上述の準備段階で領域（$n_0-\Delta n,\ n_0+\Delta n$）に属す準位のみが共鳴すると考えたので，（10.49）式で考慮すべき n はこの領域に属するものに限られる．後で不等式（10.47）が成り立つ場合に Δn の大きさを評価してみると，不等式（10.45）の $\Delta n\ll n_0$ が実際に成り立つことがわかるであろう．

それで，（10.50）式を小さな量（$n-n_0$）についてテイラー展開すると，次式が得られる，

$$w_n=w_{n_0}+w'_{n_0}(n-n_0)+\frac{1}{2}w''_{n_0}(n-n_0)^2+\cdots.$$

w_n の定義式（10.50）により，上式の第1項は0になり，また，第2項は，

$$[(E'_n)_{n_0}-\hbar\nu](n-n_0),$$

となるが，これは，定義式，

$$\hbar\omega_n = E_{n+1} - E_n \approx E'_n,$$

と共鳴条件（10.44）を考慮すればやはり 0 になることがわかる．それ故，w_nは，

$$w_n \approx \frac{1}{2} E''_{n_0}(n-n_0)^2, \tag{10.51}$$

と書ける．摂動が極めて小さいことを考慮すると，（10.49）式の $V_{n,n+1}$ は全て V_{n_0,n_0+1} に置き換えられ，さらに，$n_0 \gg 1$ であるから，

$$V_{n_0,n_0+1} \approx V_{n_0,n_0-1} \equiv V_{n_0}$$

が近似的に成り立つことに注意すれば，（10.49）式は次のような簡単な表式に書き換えられる，

$$i\hbar\dot{c}_n = \frac{1}{2} E''_{n_0}(n-n_0)^2 c_n + \frac{1}{2} V_{n_0}(c_{n+1} + c_{n-1}). \tag{10.52}$$

この方程式系は次の方法で容易に解析できる．まず，$c_n(t)$ の振幅 $a(\varphi, t)$ と変数 n に付随した位相 φ を次式で導入する，

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi a(\varphi, t) e^{i(n-n_0)\varphi}. \tag{10.53}$$

ただし，$a(\varphi, t)$ は φ について周期的であり，

$$a(\varphi, t) = a(\varphi + 2\pi, t) \tag{10.54}$$

が成り立つとする．$c_n(t)$ の表式（10.53）を方程式（10.52）に代入して，これを振幅 $a(\varphi, t)$ の方程式に書き直すと，

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = \mathscr{H} a,$$

$$\mathscr{H} \equiv -\frac{1}{2} E''_{n_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + U(\varphi)$$

$$U(\varphi) \equiv V_{n_0} \cos\varphi, \tag{10.55}$$

が得られる．この方程式は，質量が $1/E''_0$ に比例する量子論的回転子のシュレディンガー方程式になっている．このハミルトニアンに対応する古典系のハミルトニアンは（1.29）式である．このハミルトニアンは，共鳴状態の位相振動を記述する有効ハミルトニアンであった．

ところで，方程式（10.55）の一般的な解は，定常問題，

$$\mathscr{H}\chi_q = \lambda_q \chi_q, \tag{10.56}$$

の固有値 λ_q と固有関数 χ_q を用いて，次の形に表わすことができる，

$$a(\varphi, t) = \sum_q b_q \chi_q(\varphi) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\lambda_q t\right). \tag{10.57}$$

ここで，b_q は展開係数であり，初期条件から決められる．演算子 $\mathscr{H}$ が (10.55) 式の形をもつとき，方程式 (10.56) はマシュー方程式と呼ばれ，その固有値 λ_q と固有関数 χ_q の性質は数学的によく知られている．λ_q のスペクトルはバンド構造をもっている．(10.54) 式によれば，我々は，φ の周期関数となる $\chi_q(\varphi)$ だけをそのバンド構造から取り出さなければならない．

このような固有関数は第1種のマシュー関数と呼ばれ，その固有値はバンドの境界に位置する．したがって，展開式 (10.57) は，第1種のマシュー関数とその固有値のみから構成される．

いま，方程式系 (10.49) の振幅 $c_n(t)$ の初期値が $c_n(0)$ で与えられるとする．(10.53) 式と (10.57) 式で $t=0$ と置いた2つの関係式から b_q を求め，それと (10.57) 式を (10.53) 式に代入すると，$c_n(t)$ が，

$$c_n(t)=\sum_m \sum_q c_m(0)\,\chi_q(n-n_0)\,\chi_q(n_0-m)\,e^{-\frac{i}{h}\lambda_q t}$$

と表わされる．ただし，上式の $\chi_q(r-s)$ は，

$$\chi_q(r-s)=\frac{1}{2\pi}\int d\varphi\chi_q(\varphi)e^{i(r-s)\varphi},$$

を意味する．これらの表式が，初期値 $c_m(0)$ で表わした非線型共鳴問題の解である．

次に，いまの共鳴現象に捕捉される準位の数 Δn を評価してみよう．まず，$\mathscr{H}$ の表式 (10.55) から次の関係式が導かれる，

$$\frac{\Delta n}{n_0}\approx\frac{1}{n_0}\left(\frac{2V_{n_0}}{E''_{n_0}}\right)^{1/2}=\left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}\right)^{1/2} \qquad (10.58)$$

ただし，上式の右辺では (10.46) 式の記号が使用されている．関係式 (10.58) によると，我々が選んだ条件式 (10.47) が成り立てば，不等式 (10.45) すなわち $\Delta n\ll n_0$ が自動的に成り立つ．これは，また，先でおこなった Δn についての展開が妥当であることを意味する．

ここで導かれた結果については次のように解釈できる．周期的な摂動が，領域 $(n_0-\Delta n,\ n_0+\Delta n)$ に属する無摂動系 $\hat{H}_0$ の準位を幾つかの，準エネルギー状態に遷移させる．この準エネルギー状態の数は明らかに Δn 程度の数である．そして，この数は，展開式 (10.57) に実際に寄与する固有関数 χ_q の数に等しい筈である．準エネルギー状態の間隔は，(10.57) 式の λ_q の最少値の程度である．マシュ方程式に関する数学的な議論によると，この最小値は，

$$\min\lambda_q\sim(V_{n_0}|E''_{n_0}|)^{1/2}$$

である．摂動のポテンシャルの大きさは V_{n0} 程度である．したがって，展開式（10.57）に寄与する固有関数の数は，V_{n0} を準エネルギー状態の間隔で割った程度の数である．この数は確かに（10.58）式の Δn と同程度になる．

一方，上述の準エネルギー状態の間隔 $\min\lambda_q$ は，（10.46）式の記号で表わすと，

$$\Delta E_{\min}\approx\min\lambda_q\approx(V_{n0}|E''_{n0}|)^{1/2}\approx\hbar\omega_{n0}(\varepsilon\mu_0)^{1/2},\qquad(10.59)$$

と書ける．この表式と第1章の（1.32）式を比較すると，準エネルギー状態の間の遷移振動数 $\Delta E/\hbar$ は，古典的極限での位相振動の振動数に対応することがわかる．（10.47）式の右辺の不等式と（10.59）式から，

$$\Delta E\ll\hbar\omega_{n0}\approx\hbar\nu,\qquad(10.60)$$

が得られる．これは，ここで採用した共鳴近似の方法の正当性を裏づけている．

さらに，準エネルギー状態の間隔 ΔE が ε ではなく $\varepsilon^{1/2}$ に比例していることにも注意しよう．これも，2つの準位から成る古典系の共鳴振動の場合に我々がすでに知っていることと同じである．このように見てくると，量子論的非線型共鳴についての主要な結論は古典系の場合と全て同じであると思われるかもしれない．しかし，本質的に異なる点が1つある．それは，量子論の場合，（10.45）式の右辺の不等式 $\Delta n\gg1$ が必要であったが，古典系の場合にはこれに対応する条件は必要でなかった点である．この相異点を明確にするために，共鳴間に相互作用が存在する系を考えよう．

一般に，共鳴が重複すると，それらは相互作用する．古典系の場合には，共鳴の重複をストカスティシティの条件とみなすことができた（4.2節）．その著しい例は，共鳴が2個しかないときでも，それが重複するために，ストカスティシティが発生する場合である［48,87］．このような場合の代表的ハミルトニアンとして，次の形のものが考えられる，

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\frac{1}{2}\hat{V}_1\cos\nu_1 t+\frac{1}{2}\hat{V}_2\cos\nu_2 t.\qquad(10.61)$$

ここで，ν_1 と ν_2 は2個の外場の振動数である．古典系の場合，振動数 ν_1 と ν_2 の2個の外場と相互作用する2個の共鳴の幅を，それぞれ，$\Delta\omega_1$ と $\Delta\omega_2$ で表わそう．簡単のために，

$$V_1=V_2=V,\quad \Delta\omega_1\approx\Delta\omega_2=\Delta\omega$$

であるとする．2個の共鳴間の間隔は，明らかに，

$$\delta\omega=|\nu_1-\nu_2|,$$

である．古典系の場合，共鳴が重複する条件は，次の不等式が成り立つことである，

$$\left|\frac{\Delta\omega}{\delta\omega}-1\right|\gg 1.$$

この不等式が成り立てば，無摂動共鳴状態を近似的な境界とする位相空間の領域内において混合性の運動が生じる．

しかしながら，古典系の共鳴の重複と量子系の場合のそれとの間に直接的な対応関係があるとは必ずしも言えないことが次の考察からわかる．量子論的非線型振動子に1個の外場が作用すると，前述したように，$(n-\Delta n_0,\ n+\Delta n_0)$ の範囲内の量子数をもつ Δn 個程度の準位が強く相互作用する．これは1個の共鳴状態であり，この状態は $2\Delta n$ 個程度の連立方程式系（10.52）式で記述される．第2の外場が個別に作用しても同様に第2の共鳴状態が形成される．2個の外場が同時に作用すると，第1と第2の共鳴状態を重ね合せた状態になるであろう．そこで，これら2個の共鳴状態が重複する条件を付加すると，この状態の c_n を決定するための方程式系は実質的に $4\Delta n$ 個程度の方程式から構成される．$4\Delta n$ と言っても有限な数である．したがって，量子系の場合，2個の共鳴状態が重複するという問題は，形式的には，有限個の線型方程式系に帰着する．ところが，この方程式系からストカスティシティは発生し得ないのである（有限個の線型方程式はストカスティシティをもたないからである）．

しかし，上述の議論は不十分である．それは，上述の結論は，摂動論を本当は適用できない領域に摂動論を無理に適用して導かれた可能性があるからである．だが，古典系の場合には，摂動論による取り扱いが正しい結果を与えていた(4.2節)．量子系の場合実際にはどの様になるのかを見るために数値解析の結果を使って検討しよう［149, 150］．

（10.61）式のハミルトニアンを次の具体的な形に定めよう，

$$\hat{H}_0=\hbar\omega[a^+a+\mu_0(a^+a)^2],\quad \hat{V}=\hat{V}_1=\hat{V}_2=V_0(a^++a). \qquad (10.62)$$

この場合の無摂動系のスペクトルは，

$$E_n=\hbar\omega(n+\mu_0 n^2) \qquad (10.63)$$

の形をとる．ただし，n は粒子数演算子 a^+a の固有値であり，次式で定義される，

$$a^+a|n\rangle=n|n\rangle.$$

外場の振動数 ν_1 と ν_2 について対称的に取り扱うために，次の n_0 と ν を導入する，

$$\nu=\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\approx\frac{1}{\hbar}\left.\frac{\partial E_n}{\partial n}\right|_{n=n_0}=\omega(1+2\mu_0 n_0)\equiv\omega_{n_0}. \qquad (10.64)$$

さらに，この式と（10.63）式を用いて，E_nを次の展開式に書き換える，

$$E_n \doteq E_{n_0} + \frac{\partial E_{n_0}}{\partial n_0}(n-n_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_{n_0}}{\partial n^2}(n-n_0)^2$$
$$\approx E_{n_0} + \hbar\nu(n-n_0) + \hbar\omega\mu_0(n-n_0)^2. \tag{10.65}$$

（10.48）式と同じく，摂動を含めた全系の波動関数 $\psi(t)$ を無摂動系の波動関数 ψ_n で，

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t)\exp\left[-i(n-n_0)\nu t - \frac{i}{\hbar}E_{n_0}t\right]\psi_n, \tag{10.66}$$

の形に展開する．（10.49）式を導いたのと同様の手続きを，表式（10.65）と展開式（10.66）を用いて実行する．このとき，振動数 $\nu=(\nu_1+\nu_2)/2$ の摂動部分と共鳴する項のみを残すと，振幅 A_m の方程式が次のように得られる，

$$i\dot{A}_m = \nu\mu_0(m-n_0)^2 + V_0\cos\left(\frac{1}{2}\delta\omega t\right)\times(A_{m+1}+A_{m-1}). \tag{10.67}$$

ここで，$\delta\omega$ は2個の共鳴の間隔（$\nu_1-\nu_2$）である．方程式系（10.67）は，（10.52）式に対応する方程式であり，共鳴が2個存在する場合に（10.52）式を一般化したものになっている．$\delta\omega=0$ と置き，A_m を c_m に置き換えれば，確かに（10.67）式は（10.52）式に一致する．

（10.53）式からの類推により，A_mを

$$A_m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, a(\varphi,t)e^{im\varphi} \tag{10.68}$$

と展開し，この右辺を（10.67）式に代入すれば次の方程式を得る，

$$i\hbar\frac{\partial a}{\partial t} = \mathscr{H}a,$$
$$\mathscr{H} \equiv -\hbar\nu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + U(\varphi,t),$$
$$U(\varphi,t) \equiv 2V_0\cos\left(\frac{1}{2}\delta\omega t\right)\cos\varphi. \tag{10.69}$$

（10.69）式におけるハミルトニアン$\mathscr{H}$は次の形に書き換えることもできる，

$$\mathscr{H} = -\hbar\nu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + V_0\left[\cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\delta\omega t\right) + \cos\left(\varphi-\frac{1}{2}\delta\omega t\right)\right] \tag{10.70}$$

$\delta\omega=0$ の極限を考えると，表式（10.69）と（10.70）はともに，共鳴が1個の場合の表式（10.55）に移行する．

共鳴が2個の場合の有効ハミルトニアン（10.70）の特徴的なところは，それが時間を陽に含む関数であり，また，その時間依存性が消去できない点である．

（10.46）式と同様に，ここで，次の無次元のパラメーター ε を導入しておこ

う，

$$\varepsilon \equiv \frac{2V_0}{n_0\hbar\omega_{n_0}} \approx \frac{2V_0}{n_0\hbar\nu}. \tag{10.71}$$

$U(\varphi, t)$ の形を見ると，$\delta\omega$ が極めて小さいときには摂動［$U(\varphi, t)$］が断熱的であり，その効果は小さいことがわかる．一方，$\delta\omega$ が大きい場合には，摂動が高い周波数をもつことになるので，その効果は基本モードの運動にわずかな変化をもたらすに過ぎない．摂動 $U(\varphi, t)$ の効果が最も大きくなるのは，摂動の振動数が，(10.69) 式の断熱近似の準エネルギー状態が遷移する場合の主要遷移振動数と同程度になるときである．この条件は (10.69) 式と (10.59) 式から容易に導くことができ，

$$\bar{K} = \frac{\omega_{n_0}}{\delta\omega}(\varepsilon\mu_0)^{1/2} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim 1, \tag{10.72}$$

となる．ここで，ε は (10.71) 式で定義したパラメーターである．$\Delta\omega = \Delta E/\hbar$ は（古典的極限において）共鳴が1個の場合の振動数の幅であるから，(10.72) は，事実上，共鳴が重複するための条件である．〔(10.72) 式と (4.30) 式および (4.31) 式を比較してみよ〕．

さて，いよいよ (10.69) 式の数値解析の結果を検討しよう［149, 150］．図10.1は，共鳴が1個単独に存在する場合〔(10.69) 式と (10.70) 式において $\delta\omega=0$ にとった場合〕に系によって占められる準位の分布を示す．図において，黒丸は，初期条件として占められていた準位を表わす．パラメータは，共鳴の半値幅が $m^* \approx 14$ ($\Delta n \approx 2m^*$) に対応するようにとられている．

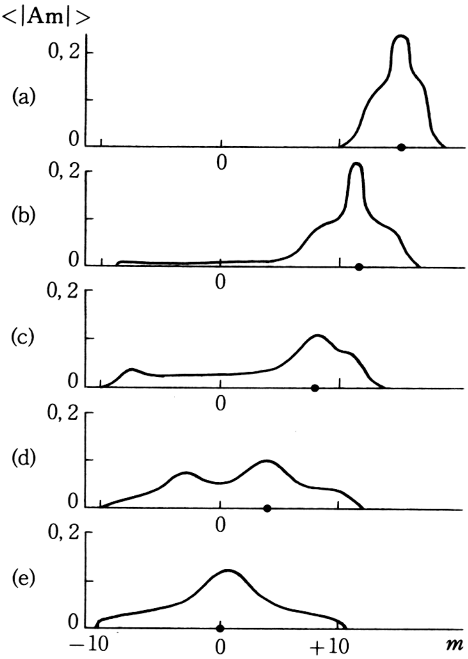


図10.1 1個の非線型共鳴に捕捉されるスペクトルの帯，横軸の m は $n-n_0$ を表わす

図 10.1 (a, b) は，初期条件として占められる m が $m>14$ であると，遷移が生じても占められる準位の幅はわずかに拡がるだけであることを示している．図10.1(c, d, e) の場合，占められる準位の分布の様子が (a, b) の場合とは全く違

っている．この（c, d, e）の図は，初期条件として占められる準位が幅 Δn の範囲にはいる場合，すなわち，非線型共鳴の範囲にはいる場合を表わしている．明らかに，この場合には，占められる準位の分布が広い範囲におよんでいる．

図10.1全体は，占められる準位の分布曲線が明確な境界をもっていることを示す．これは，非線型共鳴の幅に相当するスペクトルのバンド領域から，系が抜け出る確率が小さいことを意味する．

次に，展開係数 $A_m(t)$ に関連する量として密度行列の要素 $\rho_\alpha(t)$ の運動をみてみよう．$\rho_\alpha(t)$ の運動の分析は，次の相関関数を考えると容易になる，

$$R(\tau)=\mathrm{Re}\frac{\langle\rho_\alpha(t)\rho_\alpha^*(t+\tau)\rangle_t-[\langle\rho_\alpha(t)\rangle_t]^2}{\langle|\rho_\alpha(t)|^2\rangle_t}.$$

ただし，平均の記号 $\langle\cdots\rangle_t$ は，時間についての平均，すなわち，

$$\langle\cdots\rangle_t=\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}dt\cdots,$$

を表わす．ここで，t_0 は十分に長い時間であるとする．

図10.2は，共鳴が1個単独に存在する場合の密度行列の幾つかの要素についての相関関数を示す．この図によると，相関関数は，位相振動の振動数 $\sim\Delta E/\hbar$〔(10.59) 式をみよ〕に等しい振動数の周期構造をもっている．図中の τ（同様に，図10.3の τ）は，無次元の時間，$\tau=\nu t$ を意味する．

図10.3は，共鳴が重複する場合の相関関数を示す．この図の模様は，図10.2と

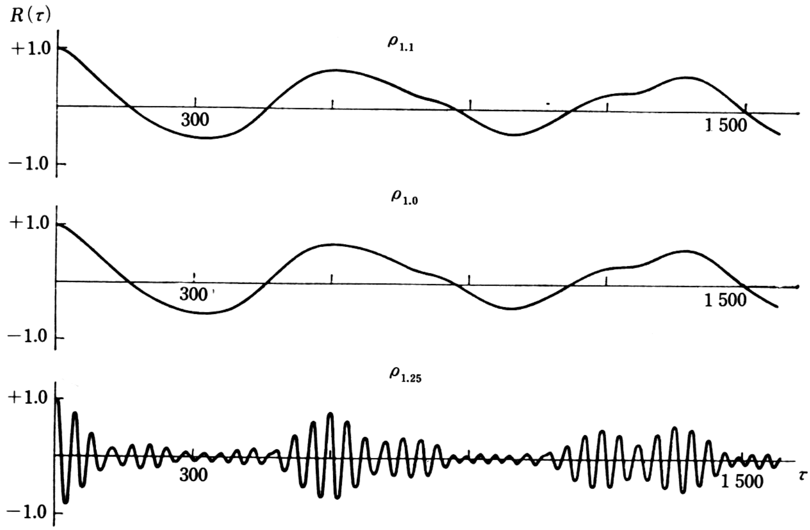


図 10.2　単独に存在する共鳴にたいする密度行列の要素についての相関関数

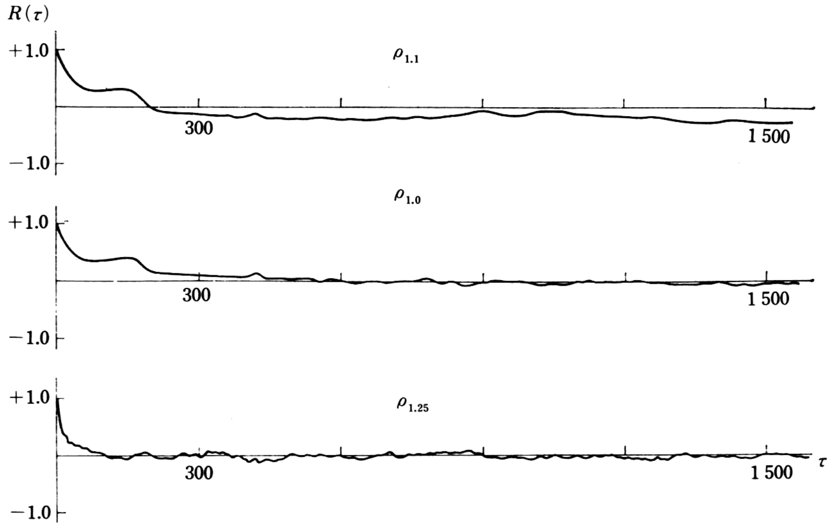


図 10.3 重複する共鳴にたいする密度行列の要素についての相関関数 ($\Delta n=120$)

比較して随分異なっている．まず，対角要素の相関関数が減衰していることがわかる．これは，密度行列の対角要素が1つの平衡状態に緩和することに対応する．しかし，相関がいつまでも残留することも見られる．これは，対角要素が位相を含まないので，運動に混合性が生じない，したがって，減衰が指数関数的にならないことを反映している．これに対して，非対角要素 $\rho_{1,0}$ または $\rho_{1,25}$ の相関関数は速やかに減衰している．この場合も，長時間におよぶ揺動が見られるが，それは極めて小さい．量子論的純粋状態の密度行列の定義から，密度行列の

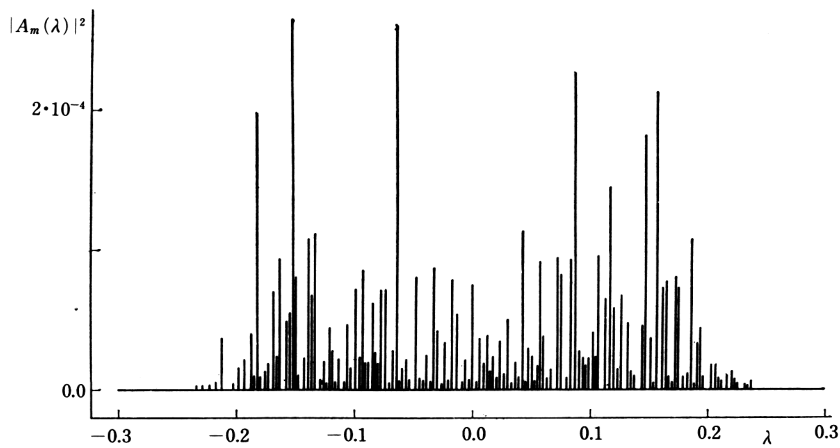


図 10.4 重複する共鳴の場合の波動関数のフーリエスペクトル

要素を振幅 $A_m(\tau)$ で表わすと,

$$\rho_{mn}(\tau)=A_n(\tau)A_m(\tau)$$

となる. 系の運動の特性は, 振幅 $A_m(\tau)$ 自体のフーリエスペクトル,

$$A_m(\tau)=\sum_{\lambda} A_m(\lambda)e^{-i\lambda\tau},$$

からも判断できる. 図10.4に, 共鳴が重視している場合の $A_m(\lambda)$ を数値計算した結果を図示した. このスペクトルは近似的に連続的な構造をもつことがわかる.

共鳴が離散的に存在する時（その極端な場合として共鳴が単独に存在する時）にみられる準周期的な構造（図10.2）と共鳴が重複して存在する時にみられるストカスティックな運動（図10.3および図10.4）との間には明確な境界がある. 一般的に, 後者の運動になるためには共鳴に関わる準位の数 Δn が十分に大きくなければならない. もしも, Δn が小さくて, 数十以下であると, 相関関数はいつまでも大きな値に留まる. つまり, 減衰が極めてゆっくりしたものになる. この様な領域は, 量子論的効果が本質的になる領域に対応する.

第10章に関する注釈

1.　ここで説明する方法は, 時間移動演算子の積分表示を利用する幾つかの方法のうちの１つである.

2.　表式（10.13）の段階で準古典近似を考えることも可能である. 実際にそれを実行すれば, 古典的写像（9.62）式が得られる. 準古典的な表式を求めるためには, 積分（10.13）に鞍点法を適用する必要がある. その計算はかなり複雑なので（文献［148］を参照), ここではそれを省略した. ただし, 次のことを指摘しておく. 鞍点法の場合, それを $2n$ 階の積分に適用することになる. 時間 t が大きくなると, 積分の階数 $2n$ も大きくなる. 一方, n があまりにも大きいと,（10.13）式に鞍点法を適用する正当性がなくなる（詳しくは文献［148］をみよ). これと同時に, この準古典近似法の正当性も失われる.

3.　ここで考察しているモデルの種々の物理的側面のさらに詳しい分析が文献［151］で行われている.

4.　長時間にわたって指数関数的に発展する不安定性は無いと述べたが, 実際の状況はもっと複雑である. 考える時間間隔が短い（n が小さい）場合には, 表式（10.30）を鞍点法で計算することが可能であり, その結果, 古典的表式（9.76）と同一の $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$ に対する表式が得られる. これは, 射影（α_n, α_n^*）の位相空間上の軌道が短時間の間は古典系の場合と同じく指数関数的に拡がることを意味する. しかし, n が大きくなると, 鞍点法が

適用できなくなるので，その後は，(10.32) 式や (10.33) 式のような計算が有効になる．文献 [147] では，量子論的回転子のの場合に同じ結論が導かれている．

5. $K \ll 1$ の場合の量子論的回転子の数値解析が文献 [146] と [147] で行われている．その結果によると，回転子の平均エネルギーは，初めの間は古典的法則に従って増加する．しかし，その後は，平均エネルギーの増加率が減少し，ついには，平均エネルギーが飽和の方向にむかうことがみられる．

11章　量子論的K系の運動論的記述

古典的K系に対して運動論的方程式を導く方法はすでに第6章において論じた．いままでの標準的な方法では，相関が消失するという仮定，あるいはそれと等価な仮定（たとえば，乱雑位相近似）がなされていた．つまり，これらの仮定を前提にしてはじめて系の記述を運動論的方程式の形にまとめることができた．しかし，第6章で見たように，もしも力学系がK系であるならば，上述のような仮定を置かなくても，系の運動論的方程式を導くことができた．古典的K系の場合には，位相空間上で系の変数の混合が生じるので，系の記述が自動的に縮約されたのである．また，そのとき，変数の相関の速やかな減衰も見られた．同様なことが（ある程度の修正は必要だが）量子論的K系においても言える．

歴史的には，ウェリング(E.A. Uehling)とウーレンベック(G.E. Uhlenbeck)によって，はじめてボルツマン型の量子論的な運動論的方程式が導かれた［152, 153］．その後，相関の消失という仮定のもとで，これらの方程式はボゴリューボフによって厳密な形で導かれた［103, 104］．また，パウリ（W. Pauli）はマスター型の量子論的な運動論的方程式を提案したが［154］，これも，後に，乱雑位相近似を用いて，ボゴリューボフによって基礎づけられた（文献［104］の p.5 を参照）．

この章では，量子論的K系に対しては，初期位相が乱雑であるという仮定をおかなくても，パウリ型の量子論的な運動論的方程式が導かれることを示す．以下で述べることは，文献［144］の議論に沿うものである．運動論的方程式の導出のためのモデルとして，周期的な外力の摂動を受けている量子論的非線型振動子を考える．このモデルについては，その古典的側面はすでに4.1節で考察され，また，その量子論的側面も第9章と第10章で議論された．

以下の議論の主眼は，量子論的K系のエルゴード性のために，古典的極限で密度行列の非対角要素の速やかな減衰がどの様にして起るかを説明することである．それは準古典近似を用いてなされる．そして，系の縮約された記述がパウリ型の運動論的方程式の形で可能になることを示そう．

11.1　密度行列に対する方程式

摂動のべき展開，Φ 相関関数の分離，密度行列の非対角要素の役割.

この節では予備的な議論をおこなう．その目的は，量子論的 K 系の分析にあたって有益と思われる密度行列を考え，それに対する方程式を導くことである．

先の場合と同じく，次の形のハミルトニアンをもつ力学系を考える，

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}(q,t), \tag{11.1}$$

上式で，$\hat{H}_0$ は無摂動系のハミルトニアンであり，離散的なスペクトルをもつとする．また，$\hat{V}(q,t)$ は摂動ハミルトニアンであり，時間の周期関数であるとする．$\hat{H}_0$ の固有値と固有関数を，それぞれ，E_n と $\varphi_n(q)$ で表わすと，固有方程式，

$$\hat{H}_0\varphi_n=E_n\varphi_n,$$

が成り立つ．全系の波動関数を $\psi(q,t)$ とおき，それを次のように $\varphi_n(q)$ で展開しよう，

$$\psi(q,t)=\sum_n c_n(t)\varphi_n(q). \tag{11.2}$$

ここで，$c_n(t)$ は振幅である．(11.1) 式をハミルトニアンとするシュレディンガー方程式に (11.2) 式を代入すると，$c_n(t)$ の方程式が次のように与えられる，

$$i\hbar\dot{c}_n=E_nc_n+\sum_{m=1}V_{nm}(t)\,c_m,$$

$$V_{nm}(t)\equiv\langle n|\,\hat{V}(q,\ t)\,|m\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dq\,\varphi_n^*(q)\,\hat{V}(q,t)\,\varphi_m(q). \tag{11.3}$$

方程式 (11.3) は次の積分方程式の形に書くこともできる，

$$c_n(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}\,c_n(0)$$

$$-\frac{i}{\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t d\tau U_{nm}(\tau)\,e^{\frac{i}{\hbar}E_mt}\,c_m(\tau). \tag{11.4}$$

ここで，次の記号を使った，

$$U_{nm}\equiv V_{nm}e^{i\omega_{nm}t},\quad \omega_{nm}\equiv\frac{1}{\hbar}(E_n-E_m).$$

(11.1) 式をハミルトニアンとするシュレディンガー方程式のグリーン関数 $G(q,t|q_0,t_0)$ を導入しておくと後で便利である．これは，次の方程式を満足する関数 $G(q,t|q_0,0)$ として定義される，

$$\psi(q,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dq_0 G(q,t|q_0,0)\,\psi(q_0,0).$$

この $G(q,t|q_0,0)$ から，

$$G_{nm}(t,0)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dq\,dq_0\varphi_n^*(q)G(q,t|q_0,0)\varphi_m(q_0) \tag{11.5}$$

で定義される関数 $G_{nm}(t,0)$ と（11.2）式を用いると，振幅 c_n の方程式が次のように簡単な形に表わせる，

$$c_n(t)=\sum_{m=1}^{\infty}G_{nm}(t,0)c_m(0). \tag{11.6}$$

さらに，無摂動系のグリーン関数を次の様に定義しておこう，

$$G^0(q,t|q_0,\tau)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(q)\varphi_k^*(q_0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_k(t-\tau)},$$

$$G^0_{nm}(t,0)\equiv e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}\,\delta_{nm}. \tag{11.7}$$

表式（11.5）と（11.6）を（11.4）式に代入した後，無摂動系の固有関数 $\varphi_n(q)$ と全系の初期状態 $\psi(q,0)$ の完全性を利用すれば，全グリーン関数 $G(q,t|q_0,0)$ が次の方程式を満たすことが証明できる，

$$G(q,t|q_0,0)=G^0(q,t|q_0,0)$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_0^t d\tau\,G^0(q,t|y,\tau)\,\hat{V}(y,\tau)\,G(y,\tau|q_0,0).$$

この方程式に $\varphi_n^*(q)$ と $\varphi(q_0)$ を乗じて，q と q_0 について積分すると，次式が得られる，

$$G_{nm}(t,0)=e^{-\frac{i}{\hbar}E_mt}\,\delta_{nm}-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-\tau)}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dy\,dq_0\varphi_n^*(y)\,\hat{V}(y,\tau)\,G(y,\tau|q_0,0)\,\varphi_m(q_0). \tag{11.8}$$

この方程式（11.8）は後で必要になるであろう．

表式（11.6）式を（11.4）式に代入した結果は，次のように表わすこともできる，

$$c_n(t)=e^{\frac{i}{\hbar}E_nt}c_n(0)-\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}E_nt}\sum_{m,k=1}^{\infty}c_k(0)A_{mk}^{nm}(t,0), \tag{11.9}$$

ここで，$A_{mk}^{nm}(t,0)$ は，

$$A_{mk}^{nm}(t,0)\equiv\int_0^t d\tau\,V_{nm}\,e^{\frac{i}{\hbar}E_m\tau}G_{mk}(\tau,0) \tag{11.10}$$

で定義される．(11.10) 式の A_{rs}^{pq} の上部につけた2個の添字は摂動に関係し，下部の2個の添字はグリーン関数に関係する．

さて，いよいよ密度行列の議論に進もう．量子論的純粋状態の密度行列は次式で定義される，

$$\rho_{nm}(t)=c_m(t)\,c_n^*(t).$$

これは，いまの場合，(11.9) 式を用いて次の形に表わせる，

$$\rho_{nm}(t)=e^{-i\omega_{nm}t}\Big\{\rho_{nm}(0)+\frac{i}{\hbar}\sum_{p,q=1}^{\infty}[\rho_{mp}(0)A^{*nq}_{qp}(t,0)-\rho_{pn}(0)A^{mq}_{qp}(t,0)]$$
$$+\frac{1}{\hbar^2}\sum_{p,q,r,s=1}^{\infty}\rho_{rs}(0)A^{mp}_{pr}(t,0)A^{*nq}_{qs}(t,0)\Big\}\quad(11.11)$$

この式で，密度行列の対角要素をとれば，次式が得られる，

$$\rho_{nn}(t)=\rho_{nn}(0)+\frac{i}{\hbar}\rho_{nn}(0)\sum_{m=1}^{\infty}[A^{*nm}_{mn}(t,0)-\mathrm{C.C.}]$$
$$+\frac{1}{\hbar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{kk}\left|\sum_{m=1}^{\infty}A^{nm}_{mk}(t,0)\right|^2+\Phi_{nn}(t,0),\quad(11.12)$$

ただし，C.C. はこの記号の前の項の複素共役量を表わし，また，Φ_{nn} は，(11.12) 式の初めの3項にはまとまらない残りの項，すなわち，

$$\Phi_{nn}(t,\ 0)=\frac{i}{\hbar}\sum_{\substack{p,q=1\\(q\neq n)}}[\rho_{nq}(0)A^{*np}_{pq}(t,0)-\mathrm{C.C.}]$$
$$+\frac{1}{\hbar^2}\sum_{\substack{p,q,r,s=1\\(r\neq s)}}^{\infty}\rho_{rs}(0)A^{np}_{pr}(t,0)A^{*np}_{qs}(t,0).\quad(11.13)$$

である．

上記の2式において，(11.12) 式の初めの3項には，密度行列の対角要素だけが含まれ，(11.13) 式の Φ_{nn} には，密度行列の非対角要素のみが含まれていることに注意する．この後者の部分を Φ 相関関数と呼ぶことにする．

通常の乱雑位相近似では，

$$\rho_{nm}(0)=\rho^{(0)}_{nm}\delta_{nm},\quad(11.14)$$

の関係を仮定する，すなわち，$t=0$ で，全ての非対角要素が0であり，したがって，$\Phi_{nn}(t,0)$ が恒等的に0になることを仮定している．

そこで，つぎに行なうべきことは，条件式 (11.14) の助けを借りずに，Φ相関関数の振舞を分析することである．力学系 (11.1) が量子論的 K 系である場合にその運動方程式を準古典近似で解析して，Φ 相関関数の性質を求めよう．

解析の簡単化のため，摂動 V は小さいとし，さらに，方程式 (11.11) と (11.12) の右辺の V についての展開式を考え，V^2 の項までを考慮にいれ，それ以上

高次の項は無視しよう．表式(11.11)〜(11.13)を見ると，この近似のもとでは，A_{nm}^{pq} については V^2 の項まで考えればよく，また，(11.8) 式と (11.10) 式によると，グリーン関数自体の計算では V の 1 次の項までとれば十分であることがわかる．したがって，(11.8) 式の右辺の G は (11.7) 式の G^0 に置き換えて差支えない．このような近似計算によって，(11.12) 式は次のようになる，

$$\rho_{nn}(t)=\rho_{nn}(0)+\frac{1}{\hbar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t d\tau V_{nk}(\tau)\right|^2 \times[\rho_{kk}(0)-\rho_{nn}(0)]+\Phi_{nn}(t,0). \qquad (11.15)$$

Φ 相関関数の計算は次節でおこなう．

11.2　運動論的方程式の導出

準古典近似のグリーン関数，密度行列の“粗視化”，Φ 相関関数の減衰と相関の消失，運動論的記述への移行，幾つかの例．

準古典近似の範囲で Φ 相関関数を計算してみよう．準古典近似では，グリーン関数を次の形に書くこともできる [155]，

$$G(q,t|q_0,t)=\sum_l D_l(q,t|q_0,t_0) \times\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_l(q,t|q_0,t_0)-\frac{1}{2}i\mu_l t\right). \qquad (11.16)$$

ただし，指数関数の係数 D_l は，

$$D_l(q,t|q_0,t)=\frac{1}{(2\pi i\hbar)^{1/2}}\left|\frac{\partial^2 S_l(q,t|q_0,t_0)}{\partial q\partial q_0}\right|^{1/2}$$

で定義される．また，S_l は，ハミルトニアンとして (11.1) 式をもつ古典粒子の l 番目の軌道の作用積分であり；q_e と q_0 は，それぞれ，時刻 t と t_0 における軌道上の位置座標であり；μ_l は l 番目の軌道のモース指数といわれる数である．さらに，l についての総和は，与えられた初期条件を満足する軌道の全てについて和をとることを意味する．(11.16) 式を (11.8) 式に代入すれば，次式が得られる，

$$G_{mn}(t,t_0)=\sum_l\int_{-\infty}^{\infty}dq\,dq_0\,D_l(q,t|q_0,t_0)\,\varphi_m^*(q)\,\varphi_n(q_0) \times\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_l(q,t|q_0,t_0)-\frac{1}{2}i\mu_l\pi\right). \qquad (11.17)$$

次に，(11.17) 式の変数 (p,q) を変数 (I,θ) に変換しよう．準古典近似にお

いては，(I,θ) に対応する演算子を次の公式によって導入することができる，

$$\hat{I}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \hat{\theta}=\theta.$$

この表示をとると，$\hat{H}_0=\hat{H}_0(\hat{I})$ であり，$\hat{H}_0$ のの固有関数は，

$$\varphi_m(\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}e^{im\theta} \tag{11.18}$$

で与えられ，また，$\hat{I}$ の固有値は

$$I_m=m\hbar \tag{11.19}$$

と表わすことができる．これらの関係を (11.17) 式に代入することにより，次式を得る，

$$G_{mn}(t,t_0)=\sum_l\int_0^{2\pi}d\theta\, d\theta_0\, \mathscr{D}_l\,(\theta,t\,|\,\theta_0,t)$$
$$\times\exp\left(-im\theta+in\theta_0+\frac{i}{\hbar}S_l(\theta,t\,|\,\theta_0,t)-\frac{1}{2}i\mu_l\pi\right), \tag{11.20}$$

ただし，$D_l(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)$ は次式で定義される，

$$D_l(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)=D_l(q,t\,|\,q_0t_0)\left|\frac{\partial(q,q_0)}{\partial(\theta,\theta_0)}\right|_l.$$

ここで，ヤコビアンに付けた添字 l は，ヤコビアンを l 番目の軌道上で計算することを意味する．

運動が準古典的である場合には不等式 $I\gg\hbar$ が成り立つ．一方，(11.19) 式によると，これは $m\gg1$ および $n\gg1$ が成り立つことを意味する．これらの事実により，(11.20) 式に鞍点法を適用することが許される．(11.20) 式の極値的軌道（鞍点軌道）は，

$$\frac{\partial S_l(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)}{\partial\theta}=m\hbar,\quad \frac{\partial S_l(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)}{\partial\theta_0}=-n\hbar. \tag{11.21}$$

で規定される．他方，古典力学から次の関係式が成り立つ，

$$\frac{\partial S(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)}{\partial\theta}=I(t),\quad \frac{\partial S(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)}{\partial\theta_0}=-I(t_0). \tag{11.22}$$

上述の (11.21) 式と (11.22) 式を比較すると，積分 (11.20) 式の計算で考慮に入れるべき軌道は次の境界条件を満たすものだけでよいことがわかる．すなわち，時刻 t_0 では点 (I_n,θ_0) を通り，かつ，時刻 t には点 (I_m,θ) に到達するという条件である．この条件を満たす軌道についての総和を記号，

$$\sum_{tr}$$

で表わし，また，その軌道上の作用積分を記号 S_{mn} で表わすと，(11.20) 式は次

の形に書ける，

$$G_{mn}(t,t_0)\approx\sum_{tr}\bar{D}\exp\left(-im\theta+in\theta_0+\frac{i}{\hbar}S_{mn}(\theta,t|\theta_0,t_0)\right)$$

ここで，$\bar{D}$ は，(11.20) 式の D_l と $\exp\left(-\frac{1}{2}i\mu\pi\right)$ との積であるが，その具体的な表式は以下の議論で必要ないので，単に $\bar{D}$ と記した．上述の $G_{nm}(t,t_0)$ の表式を方程式 (11.9)～(11.11) 式に代入すると，密度行列に対する次の表式が得られる，

$$\rho_{nm}(t)=\sum_{p,q=1}\sum_{tr(1)}\sum_{tr(2)}\bar{D}^*(1)\bar{D}(2)\exp\Big[im\theta^{(1)}-in\theta^{(2)}$$
$$-ip\theta_0^{(1)}+iq\theta_0^{(2)}-\frac{i}{\hbar}S_{mp}^{(1)}(\theta^{(1)},t|\theta_0^{(1)},t_0)$$
$$+\frac{i}{\hbar}S_{nq}^{(2)}(\theta^{(2)},t|\theta_0^{(2)},t_0)\Big]\rho_{pq}(t_0). \tag{11.23}$$

この表式 (11.23) において，時間については $t>t_0$ の場合を考えており，また，$\bar{D}(1)$ と $\bar{D}(2)$ は，準古典近似では，時間のゆっくりした関数である．

方程式 (11.23) が運動論的方程式を導出するための基礎になる．運動論的方程式を導くときの一般的原理にしたがって，ここで密度行列の粗視化のための何らかの操作を導入しなければならない．(11.23)式を導く過程からわかるように，いまの行列密度は波束の集合で表わされており，その波束の中心は，先に与えた初期条件と境界条件を満たす軌道に沿って運動する．したがって，密度行列の粗視化は，たとえば，

$$\sum_{tr}\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_0, \tag{11.24}$$

のような置き換えによって行うことができる．(11.24) 式の演算を表式 (11.8) にほどこすと，粗視化された密度行列 $\bar{\rho}_{mn}$ は，

$$\bar{\rho}_{nm}(t)\equiv\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\theta_0^{(1)}\int_0^{2\pi}d\theta_0^{(2)}\rho_{nm}(t)$$
$$=\sum_{p,q=1}^{\infty}\bar{D}^*(1)\bar{D}(2)R(m,n,t|p,q,t_0)\rho_{pq}(t_0) \tag{11.25}$$

で与えられる，ただし，

$$R(m,n,t|p,q,t_0)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\theta_0^{(1)}\int_0^{2\pi}d\theta^{(2)}\exp\Big(im\theta^{(1)}-in\theta^{(2)}-ip\theta_0^{(1)}$$
$$+iq\theta_0^{(2)}-\frac{i}{\hbar}[S_{mp}^{(1)}(\theta^{(1)},t|\theta_0^{(1)},t)-S_{nq}^{(2)}(\theta^{(2)},t|\theta_0^{(2)},t_0)]\Big), \tag{11.26}$$

である．準古典近似では $S/\hbar \gg 1$ が成り立つことに注意すれば，R の表式（11.26）をもっと簡単な形に書き直せる．まず，次のような展開式が近似的に成り立つことに注意しよう，

$$\begin{aligned}S^{(2)}_{nq}(\theta^{(2)},t|\theta^{(2)}_0,t_0) &\approx S^{(1)}_{mp}(\theta^{(1)},t|\theta^{(1)}_0,t_0)\\ &+\frac{\partial S^{(1)}_{mp}(\theta^{(1)},t|\theta^{(1)}_0,t_0)}{\partial\theta^{(1)}}(\theta^{(2)}-\theta^{(1)})+\frac{\partial S^{(1)}_{mp}(\theta^{(1)},t|\theta^{(1)}_0,t_0)}{\partial\theta^{(1)}_0}(\theta^{(2)}_0-\theta^{(1)}_0)\\ &+\frac{\partial S^{(1)}_{mp}(\theta^{(1)},t|\theta^{(1)}_0,t_0)}{\partial I_m}(I_n-I_m)+\frac{\partial S^{(1)}_{mp}(\theta^{(1)},t|\theta^{(1)}_0,t_0)}{\partial I_p}(I_q-I_p).\end{aligned} \tag{11.27}$$

古典力学でよく知られた関係式と（11.21）式を利用すれば，（11.27）式は次の形に書き換えられる，

$$\begin{aligned}&S^{(2)}_{nq}(\theta^{(2)},t|\theta^{(2)}_0,t_0)-S^{(1)}_{mp}(\theta^{(1)},t|\theta^{(1)}_0,t_0)\\ &\quad\approx I_m(\theta^{(2)}-\theta^{(1)})-I_p(\theta^{(2)}_0-\theta^{(1)}_0)+\theta^{(1)}(I_n-I_m)-\theta^{(1)}_0(I_q-I_p)+\delta\\ &\quad=m\hbar\theta^{(2)}-p\hbar\theta^{(2)}_0+(n-2m)\hbar\theta^{(1)}-(q-2n)\hbar\theta^{(1)}_0+\delta.\end{aligned} \tag{11.28}$$

ここで，θ に対する依存性が小さい量はまとめて δ に含めた．この δ の具体的表式は以下で必要ない．

（11.28）式を（11.26）式に代入すれば，R の表式が次の形に書き直せる，

$$\begin{aligned}R(m,n,t|p,q,t_0) &\approx \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\theta^{(1)}_0\int_0^{2\pi}d\theta^{(2)}_0\exp\left[i(m-n)(\theta^{(2)}-\theta^{(1)})\right.\\ &\qquad\left.-i(p-q)(\theta^{(2)}_0-\theta^{(1)}_0)+i\delta\right]\\ &=e^{i\delta}|\mathscr{R}(m-n,t|p-q,t_0)|^2.\end{aligned} \tag{11.29}$$

上式の最後の行で，以前に定義した相関関数の表式，

$$\mathscr{R}(r,t|s,t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_0\exp\left[i(r\theta-s\theta_0)\right], \tag{11.30}$$

が使われている．

ある意味で，上記の（11.29）式と（11.30）式が最終的な関係式である．というのは，この位相相関関数 $\mathscr{R}$ のとる値が系の諸々の性質を決定するからである．事実，θ と θ_0 が同一の古典的軌道に位置するので，関数 $\mathscr{R}$ は，時刻 t_0 の位相 $\theta(t_0)=\theta_0$ と時刻 t の位相 $\theta(t)=\theta$ との相関を表わす典型的な相関関数になっている（4.1節を参照）．（11.30）式と（4.16）式とは明らかに同じ表式である．もしも，考察している系がストカスティシティの条件を満たしていなければ，$|\mathscr{R}|\approx 1$ となることはすでに 4.1 節で述べた．このようなときは，R もまた 1 のオーダーの量になり，密度行列の非対角要素は減衰しない〔これは（11.29）式による〕．これは，粗視化という操作（さらに，量子力学の平均操作）が，必ずしも相関の

減衰を導くとは限らないこと，言い換えれば，系の運動論的に縮約された記述を許すとは限らないことを意味する．量子系のこのような性質は以前からクリロフによって指摘されていた [33].

ところで，系がK系であると事情は全く違ってくる．K系の場合には，(4.17) 式により，Rは次式のように書ける，

$$R\sim\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_c}\right),\quad t>t_0. \tag{11.31}$$

ここで，τ_cは位相相関の減衰時間（混合時間）である．このような場合に，$t\gg\tau_c$において，0ではない値をとることのできる$\mathscr{R}$の要素は，(11.29) 式と (11.30) 式によれば，$m=n$ および $p=q$ を満たす要素だけである．一方，(11.25) 式を見ると，密度行列の全ての非対角要素が，$t\gg t_c$ では減衰することがわかる．したがって，τ_cは相関が消失するまでの時間にほかならない．

さて，量子論的K系の相関の消失という性質を利用して，系の運動論的記述を求めよう．(11.15) 式で，時間 $(t,0)$ を時間 (t_a,t_b) に置き換えた後，粗視化演算子 (11.24) 式をほどこすと，次式が得られる，

$$\bar{\rho}_{nn}(t_b)=\bar{\rho}_{nn}(t_a)+\frac{1}{\hbar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{t_b}^{t_a}d\tau\,U_{nk}(\tau)\right|^2 \times[\bar{\rho}_{kk}(t_a)-\bar{\rho}_{nn}(t_a)]+\bar{\Phi}_{nn}(t_b,t_a). \tag{11.32}$$

ただし，$\bar{\Phi}_{nn}$は，

$$\bar{\Phi}_{nn}(t_b,t_a)=\frac{i}{\hbar}\sum_{\substack{p,q=1\\(q\neq n)}}^{\infty}[\bar{\rho}_{nq}(t_a)A^{*np}_{pq}(t_b,t_a)e^{\frac{i}{\hbar}E_nt_a}-\mathrm{C.C.}] +\frac{1}{\hbar^2}\sum_{\substack{p,q,r,s=1\\(r\neq s)}}^{\infty}\bar{\rho}_{rs}(t_a)A^{np}_{pr}(t_b,t_a)A^{*nq}_{qs}(t_b,t_a), \tag{11.33}$$

である．もしも，$t_a\gg\tau_c$ であれば，(11.33)，(11.31)，(11.29) および (11.25) 式から，

$$\bar{\Phi}_{nn}\approx\exp(-t_a/\tau_c),$$

であることがわかる．それ故，方程式 (11.32) は次の形に書き換えられる，

$$\frac{d\bar{\rho}_{nn}}{dt}=\frac{1}{\hbar^2}\sum_{k=1}^{\infty}w_{nk}(\bar{\rho}_{kk}-\bar{\rho}_{nn}). \tag{11.34}$$

ここで，$\rho_{nn}=\rho_{nn}(t)$ であり，t_aに付けた添字aは省略されている．また，w_{nk}は，

$$w_{nk}=\frac{1}{\Delta t}\left|\int_{t}^{t+\Delta t}d\tau\,U_{nk}(\tau)\right|^2, \tag{11.35}$$

である．

このようにして導かれた方程式 (11.34) はパウリ型の運動論的方程式である．その導出過程には二つの重要なことが含まれている．その第1は，K 系の位相についての混合性が本質的な役割を果したということである．この混合性が存在したので，初期条件の記憶が消失し，さらに，t_c 程度の時間の経過後に，密度行列の全ての非対角要素が速やかに減衰したのである．それで，乱雑位相というような先験的仮定を置く必要がなかったわけである．第2は，運動論的方程式 (11.34) は，ある方法で粗視化した密度行列に対する方程式から導かれたということである．速やかな混合性をもつ変数について粗視化をおこなったという点で，ここで用いた粗視化の方法もまた系の混合性にその基礎を置いている．

量子論的 K 系の遷移確率 w_{nk} の具体的計算例として，ハミルトニア (11.1) が表式 (9.12) をとる場合を考えよう．この場合，まず，ポテンシャル $\hat{V}(q,t)$ は，周期 T の時間の関数であり，次の形に書ける，

$$\hat{V}(q,t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V_\nu(q)e^{i\nu\Omega t}, \quad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

摂動の行列要素は，定義式 (11.3) と (11.4) から，

$$U_{nk}(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} U_{nk}(\nu)e^{i(\nu\Omega+\omega_{nk})t},$$

となる．ただし，U_{nk} は，

$$U_{nk}(\nu)=\varepsilon\langle n|V_\nu(q)|k\rangle,$$

である．(11.35) 式の $U_{nk}(\tau)$ に上記の表式を代入すれば，w_{nk} の表式，

$$w_{nk}=\pi\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |U_{nk}(\nu)|^2\delta(\nu\Omega+\omega_{nk}), \qquad (11.36)$$

が得られる．

ハミルトニアンとして (9.12) 式の形をもつ古典的問題は第4章（4.1節）で考察した．そこでは，関係式 $\tau_c=$定数$\times T/\log K$ が導かれた〔(4.19) 式をみよ〕．

(9.12) 式の $\hat{V}(q,t)$ の具体的表式を用いて，$U_{nk}(\nu)$ を評価すればわかるように，$U_{nk}(\nu)$ は ν に独立であり，

$$U_{nk}(\nu)=\varepsilon V_{nk},$$

と書ける．この式と (11.34) 式および (2.21) 式から，方程式，

$$\frac{d\bar{\rho}_{nn}}{dt}=\frac{\pi\varepsilon^2}{\hbar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|V_{nk}|^2(\bar{\rho}_{kk}-\bar{\rho}_{nn})\delta(\nu\Omega-\omega_{kn}) \qquad (11.37)$$

が導かれる．この式の δ 関数の変数を見ると，この運動論的方程式には，外部からの摂動と共鳴する項だけが現われていることがわかる．

方程式（11.37）は，密度行列の個々の対角要素 ρ_{nn} がそれぞれの平衡分布，

$$\rho_{nn}=\rho_0$$

に近づく緩和過程を記述している．（11.34）式によると，この過程の特性緩和時間は $1/w_{nk}$ のオーダーである．

最後に，上述の運動論的方程式の導出に関連した一般的注意を述べよう．それは，準古典的運動という条件とパラメーター ζ が非常に小さいという仮定を置いたことについてである．9.5節の議論から，我々は，この仮定によって，古典型のストカスティシティの発生が量子論的 K 系でも保証されることを知っている〔(9.89) 式をみよ〕．しかし，純粋に量子論的な場合にはまだ明確なことは何も言えない（$\zeta\geq 1$ のとき，あるいは，$\zeta\ll 1$ でも長時間経過した後，系がどのようになるかについてはっきりしたことはわかっていない）．したがって，本質的に量子論的な系の場合，もしも，系が，乱雑性を表わすパラメーターをもっていないうえ，乱雑な力も受けていないとすると，系の統計的に縮約された記述がどのようなものになるかはわからない．

12 章　量子系における運動の積分の消滅

さきの3つの章では，非定常の量子論的K系を扱った．そのような系では，時間に依存する外的な摂動が原因でストカスティシティが現われた．本章では，定常な（保存系の）ハミルトニアン系の量子化を考えて，自由度（$N \geq 2$）間の相互作用が原因となってストカスティシティが発生することを示そう．

保存的量子系の主要な性質は，エネルギースペクトルの構造によって特徴づけられる．そして，エネルギースペクトルは一組の量子数（$n_1, n_2, \cdots, n_M$）によって定められる．これらの各々の量子数は運動の積分であり，当然，$M \leq N$ である．したがって，運動の積分が消滅すると，それは同時に量子数の数の減少を意味する．これは，また，エネルギースペクトルにも影響する．このために，定常な量子論的 K 系のエネルギースペクトルが特殊な“非標準的”スペクトルになる．このスペクトルの形を調べることが本章の主題である（注釈1を参照）．

量子数の消滅とエネルギースペクトルの形との関係性については．すでに，ランダウ（L.D. Landau）とスモロディンスキー（Ya.A. Smorodinsky）によって指摘されていたが［156］，しかし，実際に解析が可能になったのは，K系の理論が形成された後である．

12.1　歴史的な背景

アインシュタインの量子化規則，位相幾何学的軌道に沿った積分，“複雑な”系のスペクトルの仮定，ウィグナー－ポーター－ダイソンの理論．

本章の主題に関する歴史は，準古典的な量子化規則の議論のために1917年にアインシュタインによって発表された論文［25］にまでさかのぼる．当時知られていた量子化規則は，いわゆるボーア－ゾンマーフェルトの規則，

$$\frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i = \hbar n_i, \quad (i=1, 2, \cdots, N), \tag{12.1}$$

であった．（12.1）式において，Nは運動の積分の数である．（12.1）式の量子化規則は変数が完全に分離できる系にしか適用できないので，アインシュタインは

この量子化則に満足しなかった．実際，積分 $\oint p_i dq_i$ が運動の積分になるように変数 (p_i, q_i) を選ぶことができるのは，変数分離系においてだけである．変数が分離するという性質は量子論的な問題にいつも備っている性質ではない．したがって，変数の分離が可能か否かに無関係に，任意のハミルトニアン力学系に適用できる量子化規則が見い出されなければならない．

そこで，アインシュタインは，(12.1) 式に代わる次の量子化規則を提案した，

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_k} \sum_{i=1}^{N} p_i dq_i = n_k \hbar, \quad k=1, 2, \cdots, N. \tag{12.2}$$

ただし，作用変数 I_k と積分路 C_k は 1.4 節で定義した既約積分路である〔(1.43) 式と図1.12を参照せよ〕．

1 組の作用変数 (I_k) を 1 組の量子数 (n_k) に対応させる考え方には次のことが基礎にある．いま，任意の積分路 C に沿った積分，

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{C} \sum_{i=1}^{N} p_i dq_i$$

を考えると，この I は，ポアンカレの不変積分の 1 つである．一方，もしも，互いに独立で 1 価の運動の積分が，系の自由度の数 N に等しい数だけ存在する場合には，

$$dS = \sum_{i=1}^{N} p_i dq_i, \tag{12.3}$$

という量が全微分なることが証明できる．これは，上述の積分路が既約積分路 C_k の形で N 個存在することを意味する (1.4 節を参照)．

ところで，アインシュタインは，論文の結論で，運動の積分の数が自由度の数よりも小さい系が存在する可能性を指摘している [25]．その例として，(彼はポアンカレの研究結果を引用しているが)，現在では三体問題をあげることができよう．そして，今日では，この指摘の重要性と意味の深さは十分に認識されている．我々は，力学系で運動の積分が“消滅する”事実を知っているからである (5.3 節を参照)．しかし，ここに到るまでには，長い年月と多くの努力が必要だったのである．

他方，アインシュタインの指摘から次の疑問が生じる．ストカスティシティのために幾つかの運動の積分が消滅する場合，系の量子化をどのようにすべきか？という問題である．この問題の解答を考察する前に，(12.2) 式の量子化規則の意味を知るために，これを導く 1 つの簡単な方法を紹介しよう (注釈 2 を参照)．

まず，$G(q'',q'|E)$ が系のグリーン関数であり，q が位置座標 $(q_1,q_2,\cdots,q_N)$ を表わすとして，次の応答関数を考える，

$$g(E)=\int dqG(q,q|E)=\sum_k \frac{1}{E-E_k}. \tag{12.4}$$

ここで，E_k は系のエネルギー固有値である．この右辺の式は定常問題のグリーン関数の定義式，

$$G(q'',q'|E)=\sum_k \frac{\psi_k^*(q'')\psi_k(q')}{E-E_k},$$

から導かれるものである．ただし，$\psi_k(q)$ はエネルギー E_k をもつ定常状態の波動関数である．

準古典近似のグリーン関数 G の表式は簡単になり，よく知られた次の形をとる（たとえば，文献［155］をみよ），

$$G(q'',q'|E)\approx A\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(q'',q'|E)+\varphi\right) \tag{12.5}$$

ここで，A と φ は，それぞれ，指数関数の係数と位相であり，また，$S(q'',q'|E)$ は，エネルギー E の古典粒子が点 q' から点 q'' まで運動するときの作用積分である，つまり，

$$S(q'',q'|E)=\int_{q'_i}^{q''_i}\sum_{i=1}^{N} dq_i\, p_i(q;\ E), \tag{12.6}$$

である．A と φ は，文献［155］等で計算されており，ゆっくり変化する位置の関数であることが知られている．A と φ のこの変動のため，量子化規則はわずかに修正をうけるが，ここではそれを無視する．

(12.6) 式における点 q' と点 q'' は同一の軌道上の2点であること，したがって，積分もその軌道に沿っておこなうべきであることに注意する．しかし，運動の積分の数が N（すなわち，系の自由度の数）に等しい場合，また，その場合だけ，表式 (12.3) の dS が全微分になるので，その場合は，(12.6) 式の積分路として，q' を出発して q'' に到達する任意の曲線をとることができる．さらに，不等式 $S/\hbar\gg 1$ を考慮に入れると，積分 (12.4) の計算が1段と容易になる［157］．このときは，S が極値をとる古典近似で $G(E)$ を決定すればよい，すなわち，

$$\frac{\partial S(q,q|E)}{\partial q_i}=0$$

を満たす点で，$G(E)$ を計算すればよい．この微分を実行すると，関係式，

$$\frac{\partial S(q,q|E)}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S(q'',q'|E)}{\partial q_i''}+\frac{\partial S(q'',q'|E)}{\partial q_i'}\right)_{q_i''=q_i'=q_i}$$
$$=p_i''-p_i'=0 \tag{12.7}$$

が得られる．ここで，p_i' と p_i'' は，それぞれ，(12.6) 式の積分路の始点と終点での粒子の運動量である．

関係式 (12.7) は，始点と終点の位置および運動量が等しくなる軌道に沿って，(12.4) 式の $g(E)$ 中の作用積分が計算されなければならないことを意味する．言い換えれば，応答関数 $g(E)$ への主な寄与は全ての可能な周期軌道によるものである．幾つかの仮定のもとで，$G(E)$ の計算の簡単化をはかったが，まだかなり複雑さが残っている．それは，多次元軌道の構造の問題であり，とくに，周期軌道の構造が関係するからである．1.4 節で，測度が 0 の共鳴トーラスに属する軌道を例外とすれば，N 次元系の軌道は N 次元の不変トーラスに巻きついていることを述べた．共鳴トーラスに属する軌道は厳密に閉じている．これに対して，それ以外の軌道は閉じないで，トーラス面上をエルゴード的に（ほとんど到る所を）おおいつくす．したがって，トーラス面上に任意の小さな領域 dq をとり，その領域から出発する 1 つの軌道を追跡すると，その軌道は，ある時間の後に任意の有限の精度で始めの領域 dq に戻る．さらに，表式 (12.5) は，ある表式の漸近形であること，また，そのなかの積分 (12.6) が，実際には，軌道の細い束についてなされるので，そこでは軌道のある種の“塗りつぶし”が行われることを考慮すると，上述の簡単化には，問題を単純化しすぎた点があるようである．

しかし，S の潜在的性質，すなわち，dS が全微分になるという性質があるので，問題は見かけ程めんどうではない．この場合，系の軌道を表わす周期曲線の代りに，位相空間 (p,q) 上の位相幾何学的に閉じた曲線 Π をとることができる，すなわち，

$$S_\Pi(q,q|E)=\oint_\Pi\sum_{i=1}^{N}p_i dq_i, \tag{12.8}$$

と書ける．この表式 (12.8) を (12.5) 式に代入すると，(12.4) 式は次のように書き換えられる，

$$g(E)\approx\text{定数}\times\int dq\sum_{\Pi(q)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\Pi(q)}(E)\right). \tag{12.9}$$

ただし，$\Pi(q)$ は，点 q を通る任意の閉積分路を表わす．次に，任意の閉積分路 $\Pi(q)$ が，1.4 節で導入した既約積時路 C_k の和の形で表現できることを利用す

る．すなわち，$\Pi(q)$ は，形式的に，

$$\Pi(q)=\sum_{k=1}^{N} m_k C_k \tag{12.10}$$

と書けることに注意する．例として，図12.1に，$m_1=3$，$m_2=2$，$m_k=0$ $(k=3, 4, \cdots, N)$ の場合の閉積分路を図示した．閉積分路 $\Pi(q)$ が（12.10）式で与えられるときの作用積分 S_Π は，I_k の定義式（12.2）と（12.6）式から，

$$S_\Pi=2\pi\sum_{k=1}^{N} m_k I_k(E) \tag{12.11}$$

となる．

（12.11）式からわかるように，$S_\Pi(E)$ が q に依存しないので，（12.9）式の q についての積分は直ちに実行できて，次式が得られる，

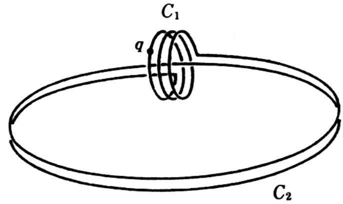


図 12.1 3つの既約積分路 C_1 と2つの既約積分路 C_2 からなる閉積分路

$$g(E)=\text{定数}\times V\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\exp\left[\frac{2\pi i}{\hbar}\times\sum_{k=1}^{N} m_k I_k(E)\right] \tag{12.12}$$

ここで，V は，1組の作用変数 $(I_1, I_2, \cdots, I_N)$ で定められる N 次元トーラスの体積である．表式（12.12）は次の積の形に書き直すことができる，

$$g(E)=\text{定数}\times V g_1(E) g_2(E)\cdots g_N(E). \tag{12.13}$$

ただし，$g_k(E)$ は，

$$g_k(E)=\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} m I_k(E)\right],$$

である．これは，また，

$$g_k(E)=\frac{1}{1-\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} I_k(E)\right)},$$

と書けるので，結局，$g(E)$ の表式として，

$$g(E)=\text{定数}\times V\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} I_k(E)\right)}, \tag{12.14}$$

が得られる．この表式は，応答関数 $g(E)$ の極が（12.2）式と同じ条件によって定められることを示している．このときの条件（12.2）式がまさにアインシュタインの量子化規則であった（注釈3を参照）．

ついでに，エネルギーの保存則，

$$H(I_1, I_2, \cdots, I_N) = E, \tag{12.15}$$

に，(12.2) 式を代入すれば，固有値 E のスペクトルに対する N 個のパラメータによる表示が得られることを指摘しておく．

以上の各関係式の導出過程では，位相空間上で系の軌道に巻きつかれた N 次元不変トーラスの存在が本質的な条件として使われている．ストカスティシティが現われる場合には不変トーラスの1部（または全部）が破壊されるので，系の量子化規則を求めるためには，明らかに，上述とは異なった方法がとられなければならない．

ストカスティックな系の量子化に先だち，上述の考察に加えて，もう1つ全く違ったタイプの問題を考えよう．それは，非常に複雑な系のエネルギー準位の分布に関することである．重い原子核の励起エネルギーが十分に大きくなると，エネルギースペクトルの構造が強く歪められ，また，エネルギー準位の配列も非常に不規則になる．このような場合，準位の分布の統計的な記述が現実をよく反映することが知られている．この考え方の提案者はウィグナー (E. P. Wigner) [158] とランダウおよびスモロディンスキー [156] である．彼等はエネルギーを1つの確率論的な量として取り扱うと次の著しい特性が現われることを指摘した．同一の対称性の準位について，エネルギー準位 E と $E+\Delta E$ の間2個のに隣接した準位を見出す確率 $P(E|\Delta E)$ が，$\Delta E \to 0$ のとき，0に近づくという性質である（この性質を準位の“反発”という）．これは，近接した準位の間に強い相関が存在することを意味する．したがって，この場合の準位間隔の分布は，通常の確率分布，たとえば，ポアソン分布 exp（−定数 $|\Delta E|$）やガウス分布 exp（−定数 $|\Delta E|^2$）ではあり得ない．

ウィグナー，ポーター (C.E Porter) とダイソン (F.J. Dyson) はエネルギー準位分布の統計理論を構築するために次の方針をとった．通常の統計力学では状態の統計的母集団について特別な仮定が設けられる．これとの類推によって，彼等の統計理論では，母集団についての確率行列の固有値 λ_k の分布を考え，その分布とエネルギー準位 E_k の分布とが等価であるという仮定を置く．この仮定を“λ-E 等価仮定”と呼ぶ（注釈4を参照）．これについてもう少し説明を加えておこう．いま，非常に多くの準位からなる系列を考え，そのなかに大きな数 ($\gg 1$) の準位を含む区間を選ぶとする．一方で，その要素が確率的に与えられる非常に次数の高い行列，たとえば，ユニタリー行列を考え，その固有値を複素平面上の単位円上に配置する．そして，近似的に m 個の固有値を含むような弧をそ

の単位円周上に選ぶとしよう．このとき，λ-E 等価仮定は，先の m 個の準位を含む区間の分布と m 個の固有値の弧の分布とが同じになることを要請する．

確率的な要素の選び方にはある程度の任意性があり，人によって取り方が異なる（ウィグナーとポーターはガウス型の確率密度を採用しているのに対して，ダイソンは群論にもとづく確率密度を用いている）．それにもかかわらず，準位間隔の分布関数，$P(E|\Delta E)$ の最終的な表式はみな同じ形，

$$P(E|\Delta E)=a|\Delta E|^{\alpha}\exp[-b(\Delta E)^2], \qquad (12.16)$$

になる．ここで，a と b は E のゆっくり変化する関数であり*，また，決定的に重要な指数 α は，系の対称性によって，1，2あるいは 4 の値をとる．

(12.16) 式の分布の最も本質的な点は，$\Delta E\to 0$ のときの分布の様子である，すなわち，

$$P(E|\Delta E)\sim|\Delta E|^{\alpha},\ (\alpha=1,2,4,\ \Delta E\to 0 \text{ のとき}), \qquad (12.17)$$

となることである．この表式（12.17）は準位間の反発の様子をよく表わしている．ただし，いまの場合，$\Delta E\to 0$ の極限の意味は，次の不等式，

$$\frac{\Delta E}{\langle\Delta E\rangle}\ll 1,$$

が成り立つことである．ここで，$\langle\Delta E\rangle$ は，考えている範囲の隣接準位間の平均値である．

λ-E 等価仮定を置く根拠は現在のところはっきりしていない．それを支持する主な理由は，母集団における確率行列の固有値の分布が実験的なエネルギー準位の分布と同じになる性質，すなわち，準位の反発という性質を示す点にある．

それにしても，エネルギー準位の分布が確率論的になる物理的理由については，何も答えられていない．ウィグナー－ポーター－ダイソン理論の場合，その物理的理由を明確にできない原因を，相互作用の未知の部分という意味の“相互作用のブラックボックス”の存在に求めている．しかし，“ブラックボックス”という概念自体曖昧である．また，その原因を系の“複雑性”に帰着させても，理論としては不満足なものとなる．それは，本来，“複雑性”は自由度の大きい系と関連した概念とみなされていたが，現在では，ストカスティィシティの条件が満たされていなければ，たとえ自由度の大きな系でも，時間発展が統計的になるとは限らないし，また逆に，この条件が満されるならばわずか 2 自由度の系でも

* ウィグナーポーター理論の a および b とダイソン理論の a および b との間にはわずかな相違が見られるが，その相違は，P の値に数パーセントの差をもたらすに過ぎない．

統計的性質を示す事実も知られているからである.

λ-E 等価仮定に対する以上の批判を総合すると，この仮定の難点は系の具体的な力学的性質の情報を完全に無視している点にあると思われる．そこで，我々は第1原理，すなわち，系の運動方程式から分布関数 $P(E|\Delta E)$ を決定するという立場をとろう．このようにして得られる結果が(12.17)式と質的には異なることを後で，見るであろう [70, 145, 17, 18].

12.2　問題の定式化

問題の定式化，準位系列の概念，規則的および不規則的スペクトル，“複雑性”の概念，準位の統計的母集団.

我々の関心事は，量子論的K系のエネルギースペクトルがどのようになるかという問題である．この問題は古典的K系の量子化の際に必ず生じる問題である．前節では，エネルギースペクトルを求めるための2つの理論が，結局，これと同じ問題に帰着することを見た.

エネルギー準位を多数含む広い区間で，エネルギースペクトルの構造がスペクトル特有の一般的規則性を示すこともあり得る．この場合，エネルギーの広い区間ということは，問題が準古典的であることを意味する．したがって，その量子論的K系のエネルギースペクトルは対応する古典系の力学的性質から自然に決められるはずである.

表式 (12.4), (12.5) および (12.7) は，準古典近似では次式が成り立つこと意味する，

$$g(E)\approx \text{定数}\times\int dq \sum_{C\in\Gamma}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_C(q,q|E)\right) \tag{12.18}$$

ここで，Cは，位相空間の領域Γに属する任意の古典的周期軌道を表わす.

さて，系の運動を計量的に不可分なエルゴード成分に分解することを考えよう．これは次のように定義される．いま，Γを

$$\Gamma=\sum_r \Gamma^{(r)} \tag{12.19}$$

と分解したとき，$\Gamma^{(r)}$ が計量的に不可分なエルゴード成分であることは，$\Gamma^{(r)}$内に存在する軌道が，時間が経過しても，$\Gamma^{(r)}$ 内にあり，かつ $\Gamma^{(r)}$ 内にのみに留まるという意味である．一般に，成分$\Gamma^{(r)}$は，安定な運動を表わす島か，さもな

ければ，ストカスティックな運動を表わす領域かである（5.3節を参照）.

（12.19）式の分解を（12.18）式に適用すれば，（12.18）式は

$$g(E)=\text{定数}\times\sum_r\int dq\sum_{C\in\Gamma^{(r)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_C(q,q|E)\right)$$
$$=\sum_r g^{(r)}(E), \tag{12.20}$$

の形に表わせる．したがって，応答関数 $g(E)$ の極は加法的になる．すなわち，$g^{(r)}(E)$ の極が，位相空間の計量的に不可分な r 番目のエルゴード成分に属する古典軌道によって決定されるならば，$g(E)$ の極はそれらから加算的に構成される．

また，一般に，関数 $g^{(r)}(E)$ の極は，一連の系列的なエネルギー固有値の点で発生する．この一連の固有値を“系列”と呼ぼう．

このように，最も一般的な力学系の準古典的量子化という問題は，各エルゴード成分で発生する全ての可能なエネルギー固有値の系列を決定する問題に帰着する．これらの系列は，エネルギー軸で分離した領域に分布するとは限らず，複雑に重なり合って分布する可能性もある．

しかしながら，表式（12.20）で重要な点は，各系列が個々に分析可能であり，また，個々の系列が他の系列と独立に記述されていることである．

したがって，系列を次のように分類するのが自然であろう．位相空間の計量的に不可分な領域において，運動が安定でかつ準周期的であるならば，その領域を規則的スペクトルの領域と呼ぶ．そのような領域では N 次元の不変トーラスが存在するので，量子化はアインシュタインの量子化規則（12.2）によって行われる．

一方，独立で1価の運動の積分の一部または（エネルギー積分を除く）全部が消滅する領域では，エネルギースペクトルが準ストカスティックになることが後で示される．この場合の準位の系列はストカスティックまたは不規則であると呼ばれる．このとき，消滅する積分の数が多ければ多い程，系は一層“複雑である”と言ってよい．

この分類の例をあげると，たとえば，位相空間上の軌道が図4.1に示されるような場合，系のエネルギースペクトルは3個の規則的な系列と1個のストカスティックな系列から構成されると考えられる．

規則的系列については量子化規則（12.2）を適用して分析すればよいことがわかっているので，本章の後の部分では，最大に“複雑な”系のストカスティックな系列のみを考察しよう．

まず，問題を次のように設定する．エネルギー以外の全ての運動の積分が消滅している量子論的 K 系を考える．また，エネルギースペクトルは1つのパラメーターで表わされているとする（たとえば，エネルギーの大きさの順に配列されたエネルギー準位を考えよ）．こうすると，問題は準位の分布を求めることになる．

この問題を具体的に分析する前に，準位の統計性と通常の統計物理学の母集団との関係について少し注意をしておこう．ストカスティックな領域のスペクトルの準位集団をある統計的母集団の表現，たとえば，多体系の状態の統計的母集団の表現であるとみなすことはできない（この事実はダイソンによって指摘された[159]）．非常に複雑な系においては，実際の物理系そのものの正確な記述は不可能だが，準位の系列の正確な記述は可能であり，エネルギースペクトルが決定できる場合がある．その例として，解離が生じる直前の状態にまで励起された分子を考えると，この分子の状態を厳密に決定することは，莫大な数の粒子からなる系の個々の粒子の位置を全て同時に決定するのと同じ程度に意味のないことであろう．一方，励起された分子のエネルギースペクトルは系のかなり詳細な特性をも反映する．したがって，系の状態を確率論的に記述すると，エネルギースペクトルも自動的に確率論的性格をもったものになる．たとえば，K 系のビリヤードの場合，幾何学的性質にわずかに幅のある同種のビリヤードを用意すれば，1個の統計的母集団を作れる．ビリヤードの軌道の基本的性質が幾何学的性質のわずかな違いによって変ることはないので，準位の分布の統計的特性も同じものになる．ある具体的な幾何学的性質をもつビリヤードはそれに対応するエネルギースペクトルを示し，母集団の代表の役割をはたす異なった幾何学的性質のビリヤードはやはり異なったスペクトルを示す．これらの集合がエネルギー準位の統計的母集団を構成することになる．

12.3　K 系の普遍性と周期軌道

K 系の普遍性，普遍性の規模，K 系の同質性，K 系の周期軌道，近似的サイクルに関する擬似エルゴード定理．

本節は，後の議論で必要な K 系の特性を述べることから始めよう．これらの諸性質はいままでの議論ではふれなかったか，ふれたにしてもその一部に過ぎなかったものである．

1.6節において，コルモゴロフによって導入されたエントロピー h が同じ値をとる系を K 系の同型と規定した．以下で，この同型ということについてもっと詳しく分析しよう．

成長率 $\nu(p,q)$ をもつ，局所的に不安定な力学系があるとする．ここで，(p,q) は位相空間上の座標を表わす，さらに，次のような位相空間上の2種類の領域を定義しておく：

(i) 位相空間の体積要素 $\Delta\Gamma$ これは，$\Delta\Gamma$ 内に属する系の性質がみな粗視化されて，同一視されるということで規定される．

(ii) 系の巨視的変化が見られるような領域 Γ．言い換えれば，Γ の一端から他端まで移動すると，系のゆっくりした変化（流体力学的変化）が見られる程度に大きな領域として Γ は定義される．

このとき，コルモゴロフエントロピー h は次式で定義できる，

$$h=\frac{1}{\Delta\Gamma}\int_{\Delta\Gamma}\nu(p,q)dp\,dq. \tag{12.21}$$

この h を，$h=h(\bar{p},\bar{q})$ と書くことも可能である．ここで，$(\bar{p},\bar{q})$ は，たとえば，$\Delta\Gamma$ の重心の座標を意味する．エントロピーのゆっくりした"流体力学的"変化の座標依存性はまさにこの $(\bar{p},\bar{q})$ 依存性で記述される．

幾つかの例をあげよう．はじめに，写像，

$$\chi_{n+1}=\{Kx_n\}, \tag{12.22}$$

を考える（2.1節をみよ）．K が大きい整数の場合，成長率 ν は x に依存しないので，$h=\nu=$ 定数，となる．2.1節の議論により，$K\gg 1$ をみたす任意の K に対して，写像（12.22）の基本的性質はみな同じになる．もう少し，複雑な例として，正弦変換（4.3節をみよ）を考える．この場合には安定性の島が存在する．この島の存在は，局所不安定性の同質性を破るという一種の"表面"効果をひきおこす．しかし，この場合も $K\gg 1$ ならば，安定性の島による効果を無視できる．これは，粗視化の領域 $\Delta\Gamma$ をあらかじめ，

$$\Delta\Gamma>\frac{\text{定数}}{K}$$

に取って置けば，(12.21) 式のエントロピー h が $\Delta\Gamma$ の位置 $\bar{x}$ に依存しなくなることを意味する．

これらのことを整理すると次のように言うことができる．異なった系でも，h の値が同じであれば，これらの系の巨視記述はみな同じになる．この意味で，こ

れらの系は同型であるといわれる．この性質は，また，K 系の普遍性とも呼ばれる（厳密に言えば，巨視的運動の普遍性は，K 系の運動状態の全集合に適用される概念ではなく，そのなかの位相空間上の運動がストカスティックになる部分にのみ適用できる概念である）．

もしも，位相空間のある領域で，ν＝定数であるならば，K 系の力学的性質はその領域で同質（一様）である．また，(12.21) 式の粗視化がなされた後で，エントロピー h が定数になるならば，この同質性は巨視的規模で，すなわち，流体力学的な規模で生じる．

ところで，現実の系の実際的な運動はもっと複雑になるであろう．それは，外部からの周期的摂動によって非線型振動子がストカスティックな運動をする場合（第4章を参照）を考えれば容易にわかる．系がハミルトニアン系であることは系を記述するのに必要な変数の数が偶数であることを意味する（いまの振動子の場合には2個である）．そのうちの1つの変数，角変数 (θ) については，特性時間 τ_c の速やかな混合運動が進行し，一方，第2の変数，作用変数 (I) については特性時間 τ_D のゆっくりした拡散過程が進行する．したがって，一般的に，巨視的運動に関しては普遍的な2種類の時間的スケールが存在する：力学系が同一の K エントロピーをもつ場合の混合過程に関する普遍的な（τ_c 程度の）時間，および，系が同一の拡散係数をもつ場合の拡散緩和過程に関する普遍的な（τ_D 程度の）時間の2つである．したがって，たとえば，2つの力学系がある場合，それらが混合過程については同型であるが，拡散過程については非同型であるということもあり得る．

今後，混合過程が関与する巨視運動のみを考え，“普遍性”という言葉も τ_D よりも短い時間内で起る過程に対してのみ使うことにする．明らかに，これは，不等式 $\tau_c \ll \tau_D$ が成り立つことを前提にしている．

粒子の運動が混合性をもつようなビリヤードの系は今後の分析を進めるときのよい題材である．普遍性という性質を利用すると，ある任意の力学系をそれと同型のビリヤードに置き換えることができる，また，対応するビリヤードの粒子の運動を調べることにより，小さな（先端）効果を除いて，K 系の運動に関する一般的法則を求めることも可能になる．以後ではこのような性質がしばしば利用されるであろう．さらに，K 系が十分に同質であることもあらかじめ仮定しておく（少なくとも，混合過程が進行する間はこの性質が保たれるとする）．

さて，ここで，K 系の周期軌道について少し込み入った議論をして置く．

自由度が N で，N 個の運動の積分をもつ可積分力学系の場合，周期軌道は次の条件を満たす共鳴トーラス上に存在する，

$$m_1\omega_1(I_1, I_2, \cdots, I_N)+\cdots+m_N\,\omega_N(I_1, I_2, \cdots, I_N)=0. \qquad (12.23)$$

ここで，ω_k は振動数であり，m_k は正または負の整数である．この系に小さな摂動が加わると，はじめ閉じていた軌道は新しい（摂動を受けた）トーラスに移行する．この場合，摂動を受けた軌道と元の周期軌道との位相的な距離は時間の線型関数程度である．言い換えれば，時間的に遅い増加を示す．

しかし，K 系であると事情は違ってくる．K 系の場合には，局所不安定性のため，初期条件に対するわずかな摂動が軌道間の距離の指数関数的増加となって現われる．したがって，全ての周期軌道が非常に不安定になる．このとき，周期として値 T をもつ周期軌道の数 $n(T)$ が，

$$n(T)\approx\exp(hT), \qquad (12.24)$$

で与えられることが示される［160～162］．この（12.24）式は次の様に考えると理解できる．いま，K 系の1つの周期軌道を考え，その上の A 点に目印をつける．一般的に，周期 T が長ければ長い程，軌道は一層複雑になる（図12.2(a)を見よ）．つぎに，点 A に極めて近い点 A' から出発する軌道を考え，それがしばらくすると，点 A' の近傍に戻ってくるとしよう．ここで，軌道が戻ってくる点は A' の近傍であって，点 A' 自体ではない，したがって，軌道は，厳密には閉じていないことに注意する（図12.2(b)をみよ）．しかし，いまの場合，局所不安定性があるので，初期条件を“かき混ぜる”ことによって，これらの軌道を閉じさせることができる．その上，混合過程は，点 A の近傍に短時間のうちに戻る軌道のある部分を位相空間の任意の領域に移動させることができる．また，これらの軌道がわずかにかき混ざると，これらは周期的軌道になる．それ故，周期

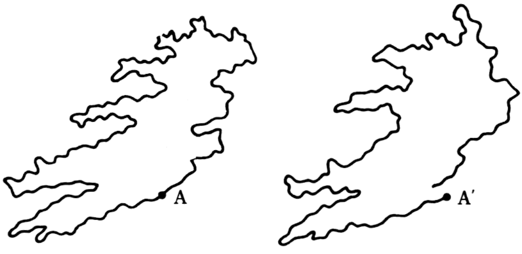


図 12.2　K 系において，(a) 閉じた軌道，(b) ほぼ閉じた軌道．

T をもつ軌道の数は，時刻 T に系によって占められる領域を包み込む位相空間の体積に比例する．この体積が次のように指数関数的に増大することはよく知られている，

$$\Delta\Gamma(T) \approx \Delta\Gamma_0 \exp(hT).$$

この関係式から表式（3.24）を導くことは容易である．特に，アノソフ流の場合には，もっと詳しい次の関係が導かれている［161］，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{n(T)hT}{e^{hT}} = 1. \tag{12.25}$$

周期軌道の集合が到る所で稠密であることも知られている．しかし，各周期ごとの軌道の分布については何も言えない．というのは，それを確定するためには，$n(T)$ だけでなく．軌道が占める位相空間の各部分の知識が必要だからである．閉じた軌道の分布の問題はボーエン（R. Bowen）によって解かれているので［163］，その議論を紹介しよう．まず，位相空間の領域 $\Delta\Gamma\,(\Delta\Gamma \ll \Gamma)$ をとり，その領域を通る全ての周期軌道を考える．幾周期か経た後では，$\Delta\Gamma$ における軌道の分布は $\Delta\Gamma$ の位置には依らないで，$\Delta\Gamma$ の境界の形にわずかに依存する．これは K 系の同質性からの帰結である．

つぎに，$\Delta\Gamma$ を通過する閉じた軌道 C を $C_{\Delta\Gamma}$ と書き，また，その軌道に沿った座標を $x(C_{\Delta\Gamma})$ で表わす．閉じた軌道 $C_{\Delta\Gamma}$ は，その周期によって分類できる．その分類による1つ集団を $C_{\Delta\Gamma}(T)$ と書こう．そうすると，ボーエンの結果は次の表式で表わされる，

$$\int g(x)\rho(x)dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\rho_0(\Delta\Gamma, T)\Delta\Gamma} \sum_{C\in C_{\Delta\Gamma}(T)} \int_{x\in C_{\Delta\Gamma}(T)} dx g(x)\rho_C(x). \tag{12.26}$$

ここで，$g(x)$ は x の任意の可積分関数であり，$\rho(x)$ は位相空間上の定常的な分布関数であり，また，$\rho_0(\Delta\Gamma, T)\Delta\Gamma$ は，周期が区間 $(T, T+\Delta T)$ にある周期軌道の数である．ただし，ΔT と $\Delta\Gamma$ の間には $\Delta T = (dT/d\Gamma)\Delta\Gamma$ の関係があるとする．さらに，$\rho_C(x)$ は，閉じた軌道 $C_{\Delta\Gamma}(T)$ 上の座標 x における分布関数である．

この注目すべきボーエンの結果は，閉軌道の場合のエルゴード定理に相等すると考えてよい．事実，種々の関数の閉軌道に関する平均を求める際の困難は，全て，このボーエンの結果によって取り除くことができる．なお，(12.26) 式の規格化は次式によって規定される，

$$\frac{1}{\rho_0(\Delta\Gamma, T)\Delta\Gamma} \sum_{C\in C_{\Delta\Gamma}(T)} 1 = 1.$$

次の事実に注目すれば，(12.26) 式の定性的な意味をとらえる助けになるであろう．周期 T をもつ閉じた軌道の集合のなかには，時間 T の間に，$\varDelta\Gamma$ に 2 回戻るもの($T_1+T_2=T$ であるような 2 つの周期をもつ軌道)，および，$\varDelta\Gamma$ に 3 回戻るもの ($T_1+T_2+T_3=T$ であるような 3 つの周期 T_1, T_2, T_3 をもつ軌道) および…が全て含まれるという事実である．

周期 T が十分に大きい場合，閉じた軌道は，許される位相空間上を十分に稠密にかつ一様におおいつくす．したがって，十分に大きな周期の $C_{\varDelta\Gamma}(T)\ni C$ の閉じた軌道についての平均操作は，これに対応する確率測度 $\rho(x)dx$ についての全位相空間上の平均操作と等価になる．この事実を利用すれば，表式 (12.26) をもっと簡単にすることができる．一般に，領域 $\varDelta\Gamma$ から出発した任意の非周期的軌道は，非常に長い時間の間には，何回でも $\varDelta\Gamma$ に戻る．1 つの軌道の 1 部分を考えて，$\varDelta\Gamma$ と交わってから次に $\varDelta\Gamma$ と交わるまでの軌道の部分 (図12.3の曲線 C_1, C_2, …) を近似的サイクルと呼ぶことにしよう．これらの曲線 C_k と周期軌道との差はほんのわずかしかない．何故ならば，これらの開曲線 C_k をわずかに“かき混る”ことによって，それらを閉曲線にすることができるからである．したがって，T が十分に大きい場合には，(12.26) 式の総和は，

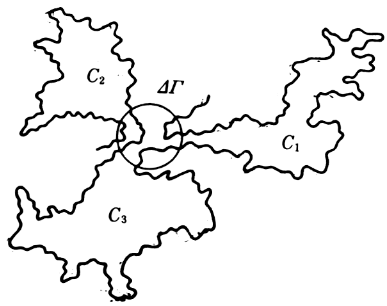


図 12.3 K 系の近似的サイクル

$$\sum_{C\in\varDelta\Gamma} = \sum_{\bar{C}\in\varDelta\Gamma} \tag{12.27}$$

に置き換えることができる．ここで，$C\in\varDelta\Gamma$ は領域 $\varDelta\Gamma$ と交わる周期軌道を意味する，すなわち，$C_{\varDelta\Gamma}$ である．また，$\bar{C}\in\varDelta\Gamma$ は，$\varDelta\Gamma$ と交わる近似的サイクルを意味し，$\bar{C}_{\varDelta\Gamma}$ と表記してよいものである．もし，位相空間の全領域 Γ にわたって同質であるならば，(12.27) 式は次の形にも書ける，

$$\frac{1}{\rho_0\Gamma}\sum_{C\in\Gamma}=\frac{1}{\rho_0\varDelta\Gamma}\sum_{C\in\varDelta\Gamma}=\frac{1}{\rho_0\varDelta\Gamma}\sum_{\bar{C}\in\varDelta\Gamma},$$
$$\frac{1}{\rho_0\varDelta\Gamma}\sum_{\bar{C}\in\varDelta\Gamma}1=1;\ \ \frac{1}{\rho_0\varDelta\Gamma}\sum_{\bar{C}\subseteq\varDelta\Gamma}1=1. \tag{12.28}$$

(12.27) 式と (12.28) 式の総和をとる演算はある意味で便宜上のものである．というのは，一般に，周期軌道の数は無限大であり，したがって，ρ_0 も無限大になるからである．しかし，これにかわる方法が無いわけではない．周期軌道の総

和と近似的サイクルの総和の両者に対して，ある長さL以上の軌道を無視するという切断を導入する方法である．(12.27) 式と (12.28) 式は，この方法によって総和を計算した後に，$L\to\infty$ の極限をとった結果を表わすと解釈する．それらは次の関係を満たすであろう．

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\rho_0(L)\varDelta\Gamma}\sum_{\substack{C<L\\ C\subseteq\varDelta\Gamma}}1=\text{定数},$$

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\rho_0(L)\varDelta\Gamma}\sum_{\substack{\bar{C}<L\\ \bar{C}\subseteq\varDelta\Gamma}}1=\text{定数}. \tag{12.29}$$

いずれにしても，この条件 (12.29) によって (12.28) 式の規格化が定められる．

2つの普遍的時間をもつ現実のハミルトニアン系の場合には，同質性に関する前述の考察の時と同様に，上述のような議論が成り立たないので注意を要する．いま，位相空間上の A 点で，作用変数が値 I_0 をもち，角変数が値 θ_0 をもつとしよう．角変数 θ については混合過程が速やかに進行するので，点 $A(I_0, \theta_0)$ から出発した軌道上の角変数 θ は，ある時間後に，θ_0 に近い値をとり得る．その故，点 A をわずかに“かき混ぜる”ことによって，角変数の初期値と最終値を一致させることができる．しかし，作用変数 I の変動はゆっくりした拡散過程によって起るので，I の値が元の値 I_0 に戻るまでには相当の長い時間 $\tau_D(\gg\tau_C)$ 以上の時間が必要である．その上，戻る過程の法則性も角変数の場合とは全く異なる．系全体が再帰する様子を規定するのは当然作用変数の方の過程である．ところでハミルトニアン系が有限領域で運動する場合は，ポアンカレの再帰定理（1.1節を参照）によって，系は点 A の任意の近傍に必ずたち帰る．しかし，粒子の酔歩運動が拡散的であると，ある特性パラメーター値 T_0 以後の時間に系が再帰する確率は時間の関数として指数関数的に小さくなる [164]〔たとえば，写像 (12.22) 式で $K>1$ の場合，パラメーター T_0 は1になり，また，$t\to\infty$ で再帰が起る確率は，定数$\times\exp(-ht)$ となることが証明できる〕．これは，2つの普遍的な時間スケールがあることからの1つの帰結である．つまり，系の再帰が起りにくいのは，系が2個の変数をもち，そのうちの1つの変数 (θ) については運動が速やかな混合過程でストカスティックになり，他の変数（I）については運動がゆっくりした拡散過程で変動するためである．

12.4 量子化規則

周期軌道についての総和，K系の量子化規則，近似的サイクルとの関係，切断理論との関係．

応答関数の表式（12.18），

$$g(E) \approx \text{定数} \int dq \sum_{C \in \Gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_C(q, q | E)\right), \tag{12.30}$$

に立ち戻って考えよう．ここで，CはK系の任意の周期軌道である．K系の一様性を利用すれば，（12.30）式のqについての積分は容易に実行でき，その結果は，

$$g(E) \approx \text{定数}\ V \sum_{C \in \Delta\Gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_C(E)\right), \tag{12.31}$$

となる．ただし，$S_C(E)$は，領域$\Delta\Gamma$を通過する任意の閉軌道C上の作用積分である．ある閉軌道Cの1つのサイクル上の作用積分を$S_C^0(E)$で表わすと，一般に，周期軌道は幾つかのサイクルから構成されているので，（12.31）式は，

$$\begin{aligned} g(E) &\approx \text{定数}\ V \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{C \in \Delta\Gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} m S_C^0(E)\right) \\ &= \text{定数}\ V \sum_{C\Delta \in E} \frac{1}{1-\exp\left(\frac{i}{\hbar} S_C^0(E)\right)}, \end{aligned} \tag{12.32}$$

と書ける．したがって，$g(E)$の極は次の方程式から求められる，

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} S_C^0(E)\right) = 1. \tag{12.33}$$

これから，ただちに，量子化規則，

$$S_C^0(E) = 2\pi m \hbar, \tag{12.34}$$

が得られる．ここで，mは任意の整数である．

（12.33）式または（12.34）式はK系のエネルギースペクトルについての量子化規則を与えている．これらは簡単な形をしているが，それは見かけだけのことである．実は，$S_C(E)$が，ストカスティックな曲線上の作用積分であり，したがって，ストカスティックな量であることを考慮しなければならないのである．それで，K系の量子化の問題は，あるストカスティックな過程を1つの曲線に置き換える問題に帰着するわけである．その理論を議論する前に，次のことを注意

しておこう．もしも，(12.33) 式の段階で，閉軌道ではなく，幅が $\delta\Gamma$ の小さい領域に属する近似的サイクルをとっていたとすれば，(12.33) 式に代って，

$$\frac{1}{\rho_0 \delta\Gamma} \sum_{\bar{C} \in \delta\Gamma} e^{\frac{i}{\hbar} S_C^0(E)} = 1, \tag{12.35}$$

が得られていたであろう．この (12.34) 式の形の量子化規則は文献 [70] で求められており，また，(12.35) 式の形のものは文献 [145]，[17] および [18] で導かれている（注釈 5 を参照）．

さて，議論を本題に戻そう．いま，周期軌道の 1 つのループ（サイクル）上の作用積分 $S(E)$ が S と $S+dS$ の間の値をとる確率密度 $P(S|E)$ が与えられたとする（以下では，添字 C とか 0 を省略する）．すると，エネルギー固有値が区間 $(E,\ E+dE)$ の値をとる確率密度は，

$$P(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \int dS\, P(S|E) \left| \frac{dS}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar), \tag{12.36}$$

と書ける．一方，区間 $(0,\ E)$ に含まれる定常状態の数 $\mathcal{N}(E)$ とストカスティックな方程式 (12.34) の全ての解の数とが等しいという関係から，$\mathcal{N}(E)$ は，

$$\mathcal{N}(E) = \int_0^E dE \sum_{m=1}^{\infty} \delta(S - 2\pi m\hbar) \left| \frac{dS(E)}{dE} \right|, \tag{12.37}$$

と表わせる．この式の S についての平均をとると，状態の数の平均値は次のようになる，

$$\langle \mathcal{N}(E) \rangle = \int_0^E dE \sum_{m=1}^{\infty} \int dS \left| \frac{dS(E)}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar)\, P(S|E). \tag{12.38}$$

(12.38) 式から状態の平均密度を求めると，

$$\begin{aligned} \langle \rho(E) \rangle &= \frac{d}{dE} \langle \mathcal{N}(E) \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int dS \left| \frac{dS(E)}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar)\, P(S|E) \end{aligned} \tag{12.39}$$

となり，確率密度 $P(E)$ の表式 (12.36) と一致する（これは当然の結果である）．

表式 (12.38) と (12.39) はライスの公式といわれる表式である [165]．(12.36) 式，(12.37) 式および (12.39) 式を導く時，導関数 dS/dE がまた S の関数であって，独立な変数でないことが仮定されていた．もしも，この導関数が独立変数であるときには，表式 (12.36) と (12.38) は次の一般化された形式になる，

$$P(E)=\sum_{m=1}^{\infty}\int dS\, d\left(\frac{dS}{dE}\right)\left|\frac{dS}{dE}\right|\delta(S-2\pi m\hbar)\, P\left(S,\ \frac{dS}{dE}\middle|E\right),$$

$$\langle\mathcal{N}(E)\rangle=\int_0^E dE\sum_{m=1}^{\infty}\int dS\, d\left(\frac{dS}{dE}\right)\left|\frac{dS}{dE}\right|\delta(S-2\pi m\hbar)$$

$$\times P\left(S,\ \frac{dS}{dE}\middle|E\right),$$

$$\rho(E)=\frac{d}{dE}\langle\mathcal{N}(E)\rangle=P(E). \tag{12.40}$$

任意の K 系の場合，確率密度 $P(S|E)$ または $P(S,\ dS/dE|E)$ の全ての性質は運動方程式または写像の方程式によって決定される．これらの確率密度が決定されるならば，E が非常に大きい漸近的な場合の K 系の量子化の問題は，表式 (12.36) と (12.40) によって，原理的には解決したことになる．以下では，エネルギースペクトルの奇妙な特性，すなわち，隣接準位の間隔分布の問題に移ろう．

12.5 隣接準位の間隔分布

一般的な軌道と“典型的”軌道，確率的な曲線の安定性，準位の小間隔についての分布則，準位の大間隔についての分布，数値解析．

量子化規則 (12.33) 式またはその近似表式 (12.35) 式を用いると，エネルギー準位の分布についての問題が厳密に定式化できる．まず，閉曲線（または近似的に閉じた曲線）C の作用積分 $S_C^0(E)$ を考える．全ての閉曲線の統計集団を考え，曲線 C はその集団に属する 1 つの閉曲線であるとする．そうすると，$S_C^0(E)$ は，集合の要素の確率性を反映する 1 つの確率的な量になる．また，$S_C^0(E)$ は E にパラメーター的に依存するものとしよう．我々に関心のある E の値は，全ての E の値ではなく，(12.34) 式の根になる値だけである．したがって，我々の課題は，それらの根を大きさの順にならべたとき，根の隣り同志の間隔 $\Delta E_k=E_{k+1}-E_k$ の分布を探ることである．

なめらかな曲線と確率的な曲線が次々と交叉するような一般的な場合に，2 つの交点間の距離の分布を求める問題はかなり難しい（たとえば，文献 [166] を見よ)．さらに，いまの場合，S_C は，厳密に酔歩運動の曲線上で定義されているのではなく，閉じた曲線上で定義されているので，S_C は通常の完全に確率的な量

ではない．このために問題が一層複雑になっている．それで，はじめから厳密な解答を求めるのではなく，定性的な分析から出発して問題の解答を探る方が賢明であろう［145, 17］．

現実の K 系の幾つかの性質については 12.3 節で述べた．その 1 つとして，K 系の普遍性という性質があった．それは，1 つの K 系をモデルとして分析すれば，他の K 系の性質も具体的にわかることを意味した．そこで，モデルとして，粒子の軌道がストカスティックであるビリヤードを分析してみよう．この場合，粒子の軌道は，力学変数の一連の写像によって記述できる（たとえば，付録 1 を参照せよ）．作用変数の分布関数の時間変化は（A 1.14）式の形の拡散方程式で規定される．閉軌道の周期が十分に大きい場合，軌道が時間 τ の間に領域（S, $S+dS$）にはじめて戻ってくる確率は，次式で与えられる，

$$P_\tau(S|E)\sim\tau^{-3/2}\exp\left[-\frac{\left(S-\left\langle\frac{\Delta S}{\Delta t}\right\rangle\tau\right)^2}{2\left\langle\frac{(\Delta S)^2}{\Delta t}\right\rangle\tau}\right]. \qquad (12.41)$$

ここで，ΔSは，1 回の写像（Δt 秒間）の間の作用変数の変化量である．(12.41) 式の右辺は，

$$\bar{S}(E)\sim\left\langle\frac{\Delta S}{\Delta t}\right\rangle\tau \qquad (12.42)$$

の所で鋭い最大値をとる．

次に，“典型的サイクル”という概念を導入する．これは，1 つの閉じた（または近似的に閉じた）軌道であって，その近傍で周期軌道の分布関数が鋭いピークをもつような軌道のことである．いま，我々に興味のある軌道はエネルギーの大きい軌道である．これは，S の大きい軌道といってもよい．E の値が大きいと，一般に S も大きくなるからである，たとえば，ビリヤードの場合には $S\sim E^{1/2}$ である．さらに，S の値が大きいことは (12.34) 式の m の値が大きいことに対応する．

量子数 m が $m_0(\gg 1)$ である 1 つの“典型的サイクル”を考えよう．エネルギー E をもった粒子がその“典型的サイクル”上を運動すると，作用変数は，

$$\bar{S}(E)=2\pi\hbar m_0, \qquad (12.43)$$

となる．この関係式 (12.43) と (12.42) 式から，この典型的サイクルの“典型的時間” $\bar{\tau}$ が算出できる．この時間 $\bar{\tau}$ の存在は基本的に重要な意味をもつ．また，$\bar{\tau}$ はサイクルの“典型的長さ” l とも関連する．

さて，エネルギー $E+\Delta E$ の準位がエネルギー E の準位に最近接しているとしよう．もしも，エネルギー $E+\Delta E$ の軌道にも“典型的サイクル”が存在するならば，(12.43) 式と類似の議論ができる，すなわち，

$$\bar{S}(E+\Delta E)=2\pi\hbar m_1 \qquad (12.44)$$

と書ける．ここで，m_1 は，一般に，m_0 に近い整数である，しかし $m_0 \neq m_1$ である．(12.43) 式と (12.44) 式から注目すべき結論として，次の関係式が得られる，

$$|\bar{S}(E+\Delta E)-\bar{S}(E)|=2\pi\hbar|m_1-m_0|\geq 2\pi\hbar. \qquad (12.45)$$

つまり，間隔が ΔE の 2 つの最近接したエネルギー準位に対応する 2 つの典型的サイクルの作用変数の差は，$2\pi\hbar$ 以下にはならない．確率密度 $P(E|\Delta E)$ の $\Delta E\to 0$ のときの漸近形を規定するのは，まさにこの不等式 (12.45) であることが後の議論で示されるだろう．

ところで，軌道の形が，パラメーターとして，エネルギー E に依存することは事実である．いま，エネルギー E の“典型サイクル”をある形に決めたうえで，パラメーターとして E に ΔE の摂動を加えたとしよう．以前に，典型的サイクルには一定の典型時間 $\bar{\tau}$ が対応することを見た．そうすると，軌道のパラメーターの任意に小さい摂動 ($\Delta E\to 0$) を受けて，典型的サイクルの作用変数は，どうして有限時間 ($\sim\bar{\tau}$) の間に $2\pi\hbar$ より大きい有限量だけ変化することができるのかという疑問が生じる．このようなことは，安定な軌道の場合には明らかに不可能である．この場合は，E が $E+\Delta E$ に遷移するときの作用変数の変化 ΔS が，$\Delta E\to 0$ に応じて，やはり 0 になる，したがって，不等式 (12.25) は満たされない．この場合，安定な（ストカスティックでない）軌道のサイクル時間 $\tau(E)$ が一意的に確定するという事実が重要である．これらのことから，不安定な（ストカスティックな）場合よりも安定な場合（運動の積分が全ての自由度について存在する場合）の方が，準位間の反発が強くなる理由がわかる．不安定な場合には，サイクル時間 $\tau(E)$ が確率的に分布する〔(12.41) 式をみよ〕，そして，典型的再帰時間 $\bar{\tau}$ の典型的サイクルの他に任意の $\tau(E)$ の様々な非典型的サイクルが混在している．したがって，パラメーターの小さな摂動に対する軌道の不安定の度合が大きいければ大きい程，エネルギー準位間の反発が弱くなるのである．

上述の議論から，エネルギー $E+\Delta E$ をもち，かつ，$\Delta E\to 0$ のとき不等式 (12.45) を成り立たせるような“典型的サイクル”は実在し得ないことがわかる．しかし，エネルギー $E+\Delta E$ のサイクルが典型的でない場合（したがって，その

確率は小さい）には，不等式（12.45）が満たされる可能性がある．その可能性を検討しよう．

古典的 K 系の分析から明らかなように，ストカスティックな場合，速やかな混合運動をする変数が少なくても1つは存在する．その最も良い例は，ビリヤード問題の写像である〔(3.33) 式または（A.1.4）式をみよ〕．

この場合，E に ΔE の摂動が加わると，一般に，初期条件に

$$\delta\xi \sim \frac{dK(E)}{dE}\Delta E \tag{12.46}$$

のずれが生じる．エネルギー $E+\Delta E$ の軌道上の作用変数がエネルギー E の軌道上の作用変数から有限量（$\geq 2\pi\hbar$）だけずれることは，これらの軌道が統計的に独立でない限り，不可能であることに注意する．事実，不安定性が発展するための特徴的時間よりも短い時間の間の摂動による作用変数の変化量は極めて小さい．したがって，$\Delta E\to 0$ のとき，不等式（12.45）は満たされない．逆に，統計的に独立な二つの軌道上の作用変数の差は，0ではない確率で任意の値をとり得る．

初期時刻では極めて近い初期条件をもつ2つの軌道が，局所不安定性によって統計的に独立になるまでの時間は2.1節ですでに計算されている〔(2.28) 式をみよ〕．n 回の写像に対応する量 $\delta\xi_n$ は次の形に書ける，

$$\delta\xi_n \sim K\delta\xi_{n-1} \sim \cdots \sim K^n\delta\xi_0 = e^{nh}\delta\xi_0, \quad h \equiv \log K. \tag{12.47}$$

ここで，h はコルモゴロフエントロピーと同程度の量であり，また，$\delta\xi_0$ は（12.46）式で定義される量である．$\delta\xi_n \sim 1$ になるまでに要する写像の回数（無次元の時間）を N_0 で表わすと，(12.47) 式から，N_0 は，

$$N_0 = \frac{1}{\log K}\log\frac{1}{|\delta\xi_0|} = \frac{1}{h}\log\frac{1}{|\delta\xi_0|} \tag{12.48}$$

と評価できる．つまり，この式の N_0 だけ時間が経過すると，はじめ初期条件に $\delta\xi_0$ だけ差のあった2つの軌道が互いに遠ざかり，統計的に独立になる．

関係式（12.47）の形は，混合をおこす変数を正しくとりさえすれば，K 系に普遍的なものである．また，(12.48) 式の表式も同じように普遍性をもっている．(12.46) 式を（12.48）式に代入すれば，次の関係式が得られる，

$$N_0 = \frac{1}{\log K}\left(\log\frac{1}{|\Delta E|} + \log\frac{1}{\left|\dfrac{dK}{dE}\right|}\right).$$

さらに，この式で $\Delta E\to 0$ の極限を考えると，このときの N_0 が次の形に表わせる，

$$N_0=\frac{1}{\log K}\log\frac{1}{|\varDelta E|}=\frac{1}{h}\log\frac{1}{|\varDelta E|}. \tag{12.49}$$

この数は，粒子エネルギーを $\varDelta E$ だけかえる初期条件の摂動が，混合過程を通じて，軌道の確率論的独立性を達成するまでに，写像が繰り返されなければならない回数を表わしている．他方，エネルギー E の典型的サイクルをとると，これには1つの典型的サイクル時間 $\bar{\tau}$ が存在する，したがって，この時間に対応する写像の回数 $\bar{N}=\bar{N}(E)$ が考えられる．(12.49) 式で与えられる N_0 は $\varDelta E\to 0$ とともに増加するが，$\bar{N}(E)$ は不変である．したがって，$\varDelta E$ を充分に小さくとれば，常に不等式，

$$N_0 \gg \bar{N}, \tag{12.50}$$

を成りたたせることができる．ところで，ビリヤードの場合，粒子が壁と N_0 回程度衝突を繰り返えせば，エネルギー $E+\varDelta E$ の軌道とエネルギー E の軌道とは統計的に独立になった．この N_0 は $\bar{N}$ に比較して極めて大きい．また，$\bar{N}$ には衝突の回数の分布関数 $P(N)$ が最大値になるときの衝突回数という意味があった．これは，衝突回数が N_0 のサイクルは典型的サイクルとかけ離れた領域に属すこと，つまり，確率の小さい（分布確率の小さい）領域に属することを意味する．一般に，このような分布の小さい領域の確率は，

$$P(N_0)\sim\exp(-\text{定数 } N_0) \tag{12.51}$$

の形になる．

エネルギー $E+\varDelta E$ のサイクルで衝突回数が N_0 よりも大きいときには，不等式 (12.45) がある有限の確率で満たされるので (12.45) 式を満たし，かつ隣接する準位間の間隔が $\varDelta E$ になる確率 $P(E|\varDelta E)$ は $P(N_0)$ に比例するであろう，すなわち，

$$P(E|\varDelta E)\backsim P(N_0)$$

と書ける．$P(N_0)$ として (12.51) 式を使えは，次式を得る，

$$P(E|\varDelta E)\backsim\exp(-\text{定数 } N_0).$$

これに (12.49) 式を代入すれば，関係式，

$$P(E|\varDelta E)\backsim|\varDelta E|^{\text{定数}/\log K}=|\varDelta E|^{\text{定数}/h}, \tag{12.52}$$

が導かれる．(12.52) 式のなかの定数は E に依存するかもしれない．その定数を定めるためには，もっと厳密な方法をとる必要があると同時に，モデルを詳細に設定する必要がある．たとえば，モデルとして，スキップする電子をとると，この定数は約 1/2 になることが示されている [70].

関係式（12.52）についてはつぎの物理的に明快な解釈が可能である．この表式は，K が大きくなると（すなわち，コルモゴロフエントロピー h が増大すると），指数関数の指数が減少して，準位間の反発が弱められることを表わす．さらに，この表式によると，$K\to\infty(h\to\infty)$ のときは，確率 $P(E|\Delta E)$ が ΔE に依存しなくなる，つまり，準位間の反発が消える．これは，K が増大すると，軌道の確率化が促進され，そして，局所不安定性が強くなる結果，固有値の間の相関が弱められるためであると考えられる．その極限として，軌道が確率的になるまでの時間が 0 になる（$K\to\infty$）極限的な場合には，準位の間の相関も消滅する．このとき，系の対称性を維持するための拘束が全て消失し，系は極めて“自由な”状態になり，全ての形の相関が消滅する．

表式（12.52）は，不等式

$$\Delta E \ll \langle \Delta E \rangle \tag{12.53}$$

が成り立つ領域の準位間の間隔に対する分布を与えている．この場合もウィグナー－ポーター－ダイソン理論と同じく，準位間の反発が ΔE のべき関数で記述されているが，（12.17）式と（12.52）式の間には質的な相違がある．（12.52）式の指数 α は，

$$\alpha = \frac{\text{定数}}{h(E)}, \tag{12.54}$$

与えられ，系の力学的特性（つまり，K エントロピー）に依存する．これに対して，（12.17）式の α は系の対称性によって決まる定数である．

定数 α の役割を補う意味で，次の指数 β を定義しておくと便利である，

$$P' = \frac{dP(E|\Delta E)}{d|\Delta E|} \sim |\Delta E|^{\beta}$$

ただし，（12.53）式で与えられる領域を考えている．いまの場合，明らかに，関係式

$$\beta = \alpha - 1 = \frac{\text{定数}}{h(E)} - 1 \tag{12.55}$$

が成り立つ．ウィグナー－ポーター－ダイソン理論の場合，$\alpha=1,2,4$ の系に対して，β は，それぞれ，0, 1, 3 という値をとり，いずれにしても，$\beta\geq 0$ である．これに対して，いまの場合，（12.55）式から明らかなように，h が増加すると β は小さくなる．β はある値から出発して，負の値もとり得る．$\beta<0$ であると，$|\Delta E|\to 0$ のとき，P' が ∞ にもなり得る．ウィグナー－ポーター－ダイソン理論では，$\beta\geq 0$ であるので，P' は，$|\Delta E|\to 0$ のとき，常に定数（≥ 0）になる．

この節を閉じる前に，(12.53) 式と逆の不等式，

$$\varDelta E \gg \langle \varDelta E \rangle, \tag{12.56}$$

を満たす隣接準位の間隔 $\varDelta E$ の分布 $P(E|\varDelta E)$ を考え，その漸近形の振舞を調べておこう．前述のときと同じく，ある典型的サイクルの写像の回数が $\bar{N}$ であるとし，また，エネルギー E の軌道とエネルギー $E+\varDelta E$ の軌道とが統計的に独立になるまでの写像の回数が N_0 であるとしよう．$\varDelta E$ が十分に小さい時は，N_0 は (12.49) 式で与えられたが，今度の場合は，$\varDelta E$ が大きいから，写像の初めの段階ですでに $\delta\xi$ が 1 の程度になる〔(12.46) 式を参照〕．したがって，N_0 は 1 の程度の数になる．それ故，(12.56) 式の条件は，不等式 (12.50) も逆転させる，つまり，今度の場合は，不等式

$$\bar{N} \gg N_0 \tag{12.57}$$

が成り立つ．この (12.57) 式は，エネルギーが E と $E+\varDelta E$ の 2 つの典型的サイクルが実質的に統計的に独立であることを意味する．

いま，エネルギーが E の 1 つのサイクルを考え，その長さの特性的周期が L であり，作用積分が $S=S(L, E)$ で与えられるとしよう．サイクルの軌道は，一般に，多数回の写像を含むので，S の分布確率は次のガウス型になるであろう，

$$P(E|S)=\left(\frac{\pi}{2}L\left\langle\frac{(\varDelta S)^2}{r}\right\rangle_E\right)^{-\frac{1}{2}} \times\exp\left[\frac{\left(S-\left\langle\frac{\varDelta S}{r}\right\rangle_E L\right)^2}{2L\left\langle\frac{(\varDelta S)^2}{r}\right\rangle_E}\right]dS. \tag{12.58}$$

ここで，$P(S|E)$ は，周期 L およびエネルギー E をもつサイクルがその作用積分として区間 $(S, S+dS)$ の中の値をとる確率であり，また，$\varDelta S$ は，1 回の写像による作用積分の変化量であり，r は写像 1 回あたりの軌道の長さである．

(12.57) 式により，エネルギー $E+\varDelta E$ のサイクルの軌道とエネルギー E のサイクルの軌道とは統計的に独立なので，エネルギー $E+\varDelta E$ をもち，作用積分が S' であるサイクルに対しても (12.58) 式と同様の式が成り立つ，すなわち，次式が成り立つ，

$$P(E+\varDelta E|S')=\left(\frac{\pi}{2}L\left\langle\frac{(\varDelta S)^2}{r}\right\rangle_{E+\varDelta E}\right)^{-1/2} \times\exp\left[\frac{\left(S'-\left(\frac{\varDelta S}{r}\right)_{E+\varDelta E}L\right)^2}{2L\left\langle\frac{(\varDelta S)^2}{r}\right\rangle_{E+\varDelta E}}\right]dS'. \tag{12.59}$$

S の値に無関係に，とにかく，差 $S'-S$ が，

$$S'-S=2\pi\hbar m$$

の値をとる確率は，(12.58) 式と (12.59) 式から次のように計算できる，

$$P(E|E+\Delta E|m)=\int_0^\infty dS\,P(E|S)\,P(E+\Delta E|S+2\pi\hbar m)$$

$$=\left(\frac{L}{2\pi D}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{L}{2D}\left(\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E+\Delta E}-\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E}-\frac{2\pi\hbar m}{L}\right)^2\right] \quad (12.60)$$

ただし，D は，

$$D=\frac{1}{2}\left(\left\langle\frac{(\Delta S)^2}{r}\right\rangle_{E+\Delta E}+\left\langle\frac{(\Delta S)^2}{r}\right\rangle_{E}\right),$$

である．二つの準位が隣接する場合には $m\approx1$ と置いてよい．また，ΔE が大きいときは，不等式，

$$\left|\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E+\Delta E}-\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E}\right|\gg\frac{2\pi\hbar}{L} \quad (12.61)$$

が成り立つ．何故ならば，エネルギー E の変化 ΔE が大きい場合には，必然的に作用積分 S の大きな変化 ΔS をともなうからである．表式 (12.60) に不等式 (12.61) を適用すれば，求めるべき準位間の間隔分布が次のように書ける，

$$P(E|\Delta E)=P(E|E+\Delta E|1)$$

$$=\left(\frac{L}{2\pi D}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{L}{2D}\left(\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E+\Delta E}-\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E}\right)^2\right] \quad (12.62)$$

ΔE が極端に大きくない場合，$\langle\Delta S/r\rangle$ を ΔE について展開すれば，(12.62) 式は次の形になる，

$$P(E|\Delta E)\approx\left(\frac{L}{2\pi D}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{L}{2D}\delta^2\left(\frac{\Delta E}{\langle\Delta E\rangle}\right)^2\right],$$

$$\delta\equiv\langle\Delta E\rangle\frac{d}{dE}\left\langle\frac{\Delta S}{r}\right\rangle_{E}. \quad (12.63)$$

このように，ΔE が大きいときの隣接準位間の間隔の分布関数の漸近形はガウス分布になる．この場合も，(12.16) 式の場合とは対照的に，分布関数 (12.63) 式の中のパラメーターは系の力学的特性に依存している．

最後に，これまでの議論と関連した数値解析の結果を幾つか挙げておこう．“スタディアム” ビリヤード（付録の図 A 1.1(a) をみよ）の粒子運動は混合性をもっている．したがって，その運動の量子化を行なって，準位間の間隔分布を求めれば，上述の分布が得られる筈である．このことは文献 [167] で数値解析によって調べられている．その結果を図 12.46(b) に示す．この図のグラフは，$\Delta E\to0$

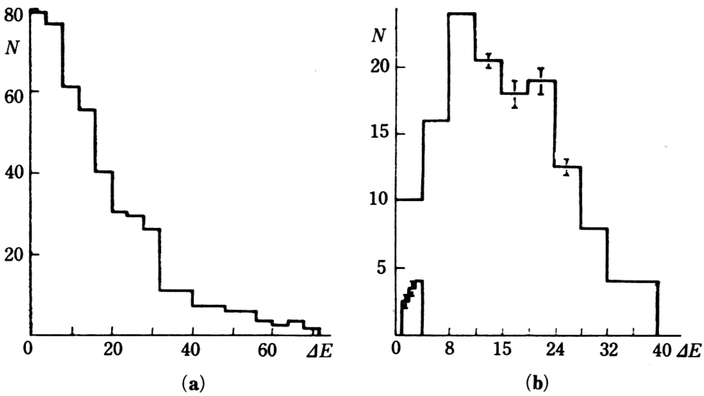


図 12.4 隣接固有値の間隔の分布を表すヒストグラム，(a) 円形の境界．(b) "スタディアム" 型の境界．参考文献 167 の数値データ．

のとき，準位間の反発が確かに存在することを表わしている．比較のために，ビリヤードの壁が円形の場合（粒子運動が混合性をもたない場合）に隣接固有値間の間隔分布について数値解析した結果を図 12.4 (a) に示す．この場合の固有値の分布についての理論的結果（この場合，ベッセル関数の根になる）はポアソン型の分布になる．文献 [168] でも，これらと同様の結論が得られている（注釈 6 を参照）．

12.6 量子論的 K 系に関する一般的注意

固有値の分布．"太鼓の形を聞きわけることができるか？" 波動関数と "準モード"，"平均" 場の概念．

前の節で述べたエネルギー準位の分布の問題は，実は，固有値の分布という一般的な問題と深く結びついている．このことを簡単な例を使って説明しよう．

次の境界値問題を考える，

$$\Delta_d\varphi+[\lambda+v(x_1,x_2\cdots,x_d)]\varphi=0,\quad \varphi|_{\mathscr{G}}=0. \tag{12.64}$$

ここで，Δ_d は d 次元空間 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ のラプラス演算子であり，$\mathscr{G}$ は d 次元空間の 1 つの超曲面を意味し，また，λ は求めるべき固有値を表わす．さらに，固有値 λ_i のスペクトルは，離散的で，縮退していないとする，そして，λ_i を値の小さい方から大きさの順に並べると，

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_N<\cdots, \tag{12.65}$$

になるとする．いま，不等式 $\lambda_N<\lambda\leq\lambda_{N+1}$ を満たすような2つの値 N と λ を考えると，言い換えれば，λ よりも値の小さい固有値が N 個存在すると考えると，次のような問題を設定することができる．すなわち，N が大きいときの固有値 λ の漸近的分布について，何か一般的関係を求めることが可能かどうかという問題である．この種の問題を解決するには，2つの方法が知られている．その1つは変分法にもとづく方法であり［169］，他の1つはタウバー型の定理にもとづく方法である（これについては，たとえば，文献［9］または［170］をみよ）．いずれにしても，これらの方法によって，領域 $\lambda_i<\lambda$ に属する固有値 λ_i の数 $N(\lambda)$ を決定することができる．このようにして得られた関係式の意味は次のシュレディンガー方程式の定常問題を例にとると理解しやすい．

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(q)]\psi=0,\quad \psi|_{\mathscr{G}}=0. \tag{12.66}$$

この方程式は，$E=\lambda$，$2m=\hbar=1$ とおけば，方程式（12.64）に移行する．問題にしている数 $N(E)$ は，

$$H=p^2/2m+V(q)=\text{定数}=E \tag{12.67}$$

という曲面によって囲まれた位相空間の領域に属する定常状態の数を意味する．この数 $N(E)$ に対する漸近形が次のように表わされることはよく知られている，

$$N(E)\sim\frac{\Gamma(E)}{(2\pi\hbar)^d},\quad (E\to\infty). \tag{12.68}$$

ただし，$\Gamma(E)$ は，曲面（12.67）式によって囲まれた位相空間の体積である．同じように量子力学の方法を用いれば，方程式（12.64）に対する $N(\lambda)$ の表式を導くことも困難ではない．

ところで，（12.68）式の $N(E)$ または $N(\lambda)$ という量は固有値の分布について極く概略的な性質しか含んでいない．一方，隣接固有値間の間隔分布はもっと微妙な性格をもっている．それで，その分布の漸近形を決定しようとするだけでも，大変な困難にぶつかる．しかし，12.5節の分析を参考にすれば，その困難の原因をつきとめることができ，解決の糸口をつかむことができる．

基本的に大事なことは，固有値の間隔分布がポテンシャル（または V）の性質と境界 $\mathscr{G}$ の形状に極めて敏感である，という点である．これは，（12.66）式または（12.64）式に対応する力学的問題を考えてみれば，よく理解できる．実際，量子数が大きいときの方程式（12.66）または（12.64）の固有関数の漸近形は，対応するハミルトニアン H をもった粒子の古典力学的な問題の解を用いて表現できる．運動の積分が消滅すると，古典力学の軌道は質的な変化を受けるの

で，対応する量子力学的準位間隔の分布関数にも質的変化が起る筈である．たとえば，正方形の壁に囲まれたビリヤードの粒子の古典軌道は規則的である．この軌道をストカスティックなものにするには，壁で跳ね返る粒子が散乱するように，壁の面を内則にわずかに凸になるように変えるだけで充分である．このような軌道の規則的なものからストカスティックなものへの変化は，量子論的には，準位間の間隔の分布関数が質的変化を受けることに対応する．しかしながら，状態の数 $N(\lambda)$ は，この変化の影響をほとんど受けない，場合によっては，全く受けないであろう．

固有値のスペクトルが準確率的分布になる場合，これに対応する分布関数を求めるためには，固有値が規則的（非確率的）に分布する場合とは全く異なった方法がとられなければならない．

そこで，次のことを前提にして議論を進めよう．それは，(12.64) 式または (12.66) 式の境界値問題に対応する古典力学の問題が非可積分系であり，したがって，固有値の分布が準ストカスティックになるという仮定である．この仮定から，状態の数 $N(\lambda)$ の表式が，一般的には，$1/\lambda^p((p>0)$ のような級数の形にはならない．何故ならば，$N(\lambda)$ は準位間隔を考慮に入れて計算される量であるが，いまの場合，準位間隔が確率的な量であるから，それを考慮に入れた量が級数のような解析的な形には書けない筈だからである．

このようなことは，(12.64) 式の境界値問題に限らず，一般的な境界値問題についても言える．

種々の共鳴器の振動スペクトルを決定する問題は (12.64) 式の形の境界値問題に帰着する．その時，共鳴器の形が境界 $\mathscr{G}$ の形を規定し，また，共鳴器の壁の物理的性質が境界条件に反映する．

そこで，次のような問題を考えよう．スペクトルの特性を調べることによって共鳴器の形を決定することが可能であろうか？ という問題である．この問題は，“音によって太鼓の形を聞きわけることが可能であろうか？”と言い換えられる．（これに関連した議論についてはアーノルドによる文献 [19] をみよ）．この問題に対する答は否である，というのは，いろいろ形の異なった共鳴器が同一の固有値のスペクトルを出すことが実際にあるからである．K 系の量子化の結果として固有値のスペクトルにストカスティックな要素が現われることを考慮すれば，この否定的な答に対して別の見方ができる．K 系の場合，同型の 2 つの K 系の具体的な形は異なっていても，これらの系が（統計的な意味で）同一の固有値のスペ

クトルをもつ，という事実があった．

量子論的 K 系の波動関数の構造は現在ところまだ明らかではない．文献［70］で示唆された仮定に従うと，運動の積分が消滅するため，古典軌道がストカスティックになるのに対応して，量子論的 K 系の波動関数は座標のランダムな（ストカスティックな）関数になる．言い換えると，その場合は，波動関数 ψ 自体がストカスティックな量になる．

波動関数を解析的に求める場合，次のことは充分留意しなければならない．我々は探求の途中で準古典近似を取り入れなければならないが，準古典近似で得られる波動関数は，一般に近似としてあまり良いものではないという点である．

準古典近似の波動関数について最初に詳しい批判的分析を行なったのはアーノルドである［171］（文献［19］もみよ）．アーノルドは，具体的な例を分析して，準古典近似では完全なモードではなく“準モード”が存在すると推論した．これは次のようなことを意味する．波動関数は時間の経過とともに徐々に振動状態（たとえば，平面波）からずれて，空間的には強くぼけた形状になり，そして，準モードに移行する．この時の波動関数は高い精度でシュレディンガー方程式を満たすが，しかし，固有関数とはかなり異なったものである．我々はすでに，量子論的 K 系の場合，波動関数のこの“拡がり”またはその準モードへの移行が，古典軌道の局所不安定性のために指数関数的な速さで進行することを知っている．

量子論的 K 系にみられらるモードから準モードへの速やかな移行過程にも 2 つの時間的（または空間的）スケールが存在し得る．その第 1 の時間的スケールは，波動関数の複雑で準ストカスティックな変化と結びついたものである．このときの場の量を取り扱うには，平均化された場を考えるのが最も自然である．この平均化された場は“平均場”と呼んでよく，また，多くの点で第 2 種の相転位の理論における分子場と類似している．第 2 の時間的スケールは平均場のゆっくりした時間発展と結びついたものである．この時間発展は，“流体力学的な”流れのように，実際の場が小さいスケールまたは大きなスケールで平均場からずれているために起る．

12.7 輻射場における原子の束縛状態のストカスティック消滅

場と原子の系のハミルトニアン，共鳴近似と運動の積分，運動の積分の消滅.

以下で考察する例は，その応用面からだけでなく，相互作用の強さの変化のために生じるストカスティシティのモデルとしても興味あるものである．この節で述べることは文献［172］に沿うものである.

輻射場と相互作用する原子系を考える．この輻射場と原子系の共存系が体積 V の共鳴器に閉じ込められているとしよう．このような系を簡単に記述する方法は，原子は量子論的に取り扱うが輻射場は古典的に取り扱うという，いわゆる半古典近似理論である．問題を簡単にするために，原子の準位は 2 個だけであるとしよう．そうすると，原子の遷移振動数はこれら 2 つの準位間の遷移振動数 ω だけになる．2 つの準位の各々の固有関数を $\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ で表わすと，これらは原子の状態を表現する基底になる．i 番目の原子の状態は次のような波動関数で表現できる，

$$\psi_i = a_i\psi^{(1)} + b_i\psi^{(2)}. \tag{12.69}$$

ここで，a_i と b_i は，ψ_i を基底（$\psi^{(1)}$，$\psi^{(2)}$）で展開したときの係数であり，次式を満たす，

$$|a_i|^2 + |b_i|^2 = 1.$$

つぎに，1 個の原子が状態 $\psi^{(1)}$ または状態 $\psi^{(2)}$ を占める確率の差と原子の双極子モーメントを次のように導入しよう，

$$n_i = |b_i|^2 - |a_i|^2,$$
$$M_i = \mu m_i = \mu(a_i b_i^* + a_i^* b_i). \tag{12.70}$$

ただし，μ は原子の双極子モーメントの行列要素である．これらの量の N 個の原子についての平均値は，

$$n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i, \quad m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i \tag{12.71}$$

で定義される．共鳴器中の輻射場 $\mathscr{E}$ は近似的に一様であるとしよう，すなわち，輻射場の波長 λ が，$\lambda \gg V^{1/3}$ を満すとしよう．そうすると，原子系と輻射場の共存系全体が n と m および $\mathscr{E}$ で記述できるようになり，これらの量の運動方程式は，

$$\ddot{\mathscr{E}}+\omega^2\mathscr{E}=\frac{1}{2}\Lambda\omega^2 m,$$

$$\ddot{m}+\omega^2 m=-\frac{1}{2}\Lambda\omega^2\mathscr{E}n,$$

$$\dot{n}=\Lambda\mathscr{E}\dot{m}. \tag{12.72}$$

で与えられる．ここで，無次元の場$\mathscr{E}$の（原子が存在しない場合の）振動数としては，原子の遷移振動数 ω に一致するものだけを取り入れてある（共鳴条件）．Λ は相互作用定数であり，次式で定義される，

$$\Lambda=\left(\frac{16\pi\rho\mu}{\hbar\omega}\right)^{1/2}. \tag{12.73}$$

また，ここで，ρ は原子の密度 N/V である．

方程式系（12.72）は不変量として次の 2 個の量をもっている．1つは，“協同数”といわれる量 r であり，

$$r=\left(n^2+m^2+\frac{\dot{m}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}, \tag{12.74}$$

で定義される．他の一つはエネルギー積分 C であり，

$$C=\frac{1}{\omega^2}\dot{\mathscr{E}}^2+\mathscr{E}^2+\left(r^2-m^2-\frac{\dot{m}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}-\Lambda\mathscr{E}m, \tag{12.75}$$

で与えられる．方程式系（12.72）の構造は，次のように第 2 量子化の表示を用いて書き直せば，わかり易くなる，

$$\mathscr{E}+\frac{i}{\omega}\dot{\mathscr{E}}\to c,\quad \mathscr{E}-\frac{i}{\omega}\dot{\mathscr{E}}\to c^+,$$

$$n\to R^z,\quad m+\frac{i}{\omega}\dot{m}\to R^+,\quad m-\frac{i}{\omega}\dot{m}\to R^-.$$

ここで，c^+ と c は振動数 ω の光子の生演成算と消滅演算子であり，R^z, R^+, R^- は，それぞれ，添字 z，$+$，$-$の付いたパウリのマトリックスである．エネルギー積分（12.75）をこの新しい変数で書き直すと次の無次元のハミルトニアンが得られる，

$$H=H_0+H_r+H_{ar}$$

ただし，

$$H_0\equiv c^+c+R^z,$$

$$H_r\equiv\Lambda(R^+c+R^-c^+),$$

$$H_{ar}\equiv\Lambda(R^-c+R^+c^+), \tag{12.76}$$

である．（12.75）式において，H_0 は，相互作用がないときの原子系と輻射場の

($\hbar\omega$ を単位にした) エネルギーであり，H_r は原子と輻射場との共鳴相互作用項を表わし，また，H_{ar} は原子系と輻射場との非共鳴相互作用項を表わす.

(12.76) 式から，次の交換関係が容易に得られる，

$$[H_0,\ H_r]=0. \tag{12.77}$$

したがって，Hの中の非共鳴項を無視すれば (これが通常の手続きである)，次の 2 個の保存則が成り立つ，

$$[\bar{H},\ H_0]=0,\quad [\bar{H},\ H_r]=0. \tag{12.78}$$

ただし，$\bar{H}$は原子系と場の共存系の共鳴近似のハミルトニアンであり，次式で定義される，

$$\bar{H}=H_0+H_r. \tag{12.79}$$

この共鳴近似のもとでは，(12.78) 式から明らかなように，2 個の独立な量子数を導入することが可能であり，エネルギーもこれらの量子数の関数として表わすことができる.

運動の積分の完全な集合として 2 個の運動の積分が存在することは，共鳴近似のハミルトニアン系 (12.79) 式の厳密解が得られることを意味する (文献 [173] を参照). この解は，エネルギーが (時間的に) 周期的に原子から場へあるいはその逆方向に移行する過程を記述する. このときの系の運動を位相空間で見ると，特異な軌道が存在する. それはセパラトリックスである. このセパラトリックスは，エネルギーがすべて原子系から場の方に移行した状態，または，その逆の状態に対応している. このように見てくると，非共鳴項を無視した効果は小さくないことがわかる.

さらに分析を進めるために，(12.75) 式の形の半古典的ハミルトニアン C に注目しよう. まず，1 原子あたりの光子の数，$\mathscr{E}^2+(1/\omega^2)\dot{\mathscr{E}}^2$ を，

$$y=\mathscr{E}^2+\frac{1}{\omega^2}\dot{\mathscr{E}}^2,$$

とおく. すると，(12.78) 式によって共鳴近似で保存する量 H_0 が，

$$H_0=y+n, \tag{12.80}$$

と書ける. これは全光子数を表わしている.

つぎに，新しい変数 (I_e, φ_e) および (I_m, φ_m) を次式によって導入する，

$$\mathscr{E}=\left(\frac{I_e}{\omega}\right)^{1/2}\cos\varphi_e,\quad \dot{\mathscr{E}}=-(\omega I_e)^{1/2}\sin\varphi_e,$$

$$m=\left(\frac{I_m}{\omega}\right)^{1/2}\cos\varphi_m,\quad \dot{m}=-(\omega I_m)^{1/2}\sin\varphi_m. \tag{12.81}$$

上式を使うと，方程式（12.72）は次のような新しい変数の正準方程式と等価であることが示される，

$$\dot{I}_e=-\frac{\partial\bar{C}}{\partial\varphi_e}=-\frac{1}{2}\omega\Lambda(I_eI_m)^{1/2}(\sin\psi+\sin\varphi),$$

$$\dot{\varphi}_e=\frac{\partial\bar{C}}{\partial I_e}=\omega-\frac{1}{4}\omega\Lambda\left(\frac{I_m}{I_e}\right)^{1/2}(\cos\psi+\cos\varphi),$$

$$\dot{I}_m=2n\frac{\partial\bar{C}}{\partial\varphi_m}=-\omega n\Lambda(I_eI_m)^{1/2}(\sin\psi-\sin\varphi),$$

$$\dot{\varphi}_m=-2n\frac{\partial\bar{C}}{\partial I_m}=\omega+\frac{1}{2}\omega n\Lambda\left(\frac{I_e}{I_m}\right)^{1/2}(\cos\psi+\cos\varphi). \tag{12.82}$$

ただし，$\bar{C}$ は $\bar{C}=\omega^2C$ であり，ハミルトニアンの役割を果たす，また，ψ と φ はそれぞれ，

$$\psi=\varphi_e-\varphi_m \text{ と } \varphi=\varphi_e+\varphi_m \tag{12.83}$$

である．さらに，関係式（12.74）を新しい変数で書くと，

$$n^2=r^2-I_m/\omega \tag{12.84}$$

が得られる．

ここで，（12.84）式の r は一般性を失うことなく1におけることに注意しよう．何故ならば，

$$y\to y/r,\quad n\to n/r,\quad m\to m/r,\quad \dot{m}\to\dot{m}/r,\quad \rho\to\rho r,\quad \Lambda\to\Lambda r^{1/2},$$

という変換によって，方程式系（12.82）から r を消去することができるからである．さらに，もしも共鳴近似をとるならば，（12.84）式で位相 φ を含む全ての項を無視してよいこともわかる．

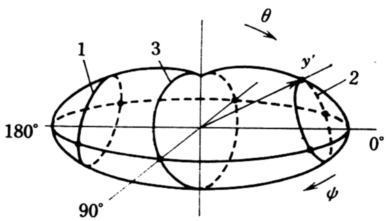


図 12.5　位相空間の定エネルギー面 $C=1$ $(y,\theta=\mathrm{arc}\cos n,\psi)$．(1) $H_0<1$ (2) $H_0>1$ (3) $H_0=1$.

共鳴近似では，セパラトリックスは $H_0=C=1$ に対応する軌道（曲面）である．Λ が小さい場合，方程式系（12.84）において非共鳴項も考慮に入れるならば，セパラトリックスの近傍に狭いストカスティックな層が発生することが示される［172］．$\Lambda\gtrsim1$ の場合，すなわち，場と原子との相互作用が強くなると，事情が異なる．この場合には，ストカスティックな運動の領域が全位相空間におよぶようになる．これと関連した方程式系（12.84）の数値計算の結果を紹介しよう．

図12.5は，共鳴近似の場合のエネルギーが一定の曲面を表わしている．系の閉

軌道はそのような曲面上に位置する．$\Lambda \geq 1$ であるときに非共鳴項が方程式系に加わると，軌道はストカスティックになる（図 12.6），と同時に，運動の積分〔(12.80) 式〕がストカスティックに消滅する（図 12.7）．非共鳴項が無い場合には（12.80）式より，保存則

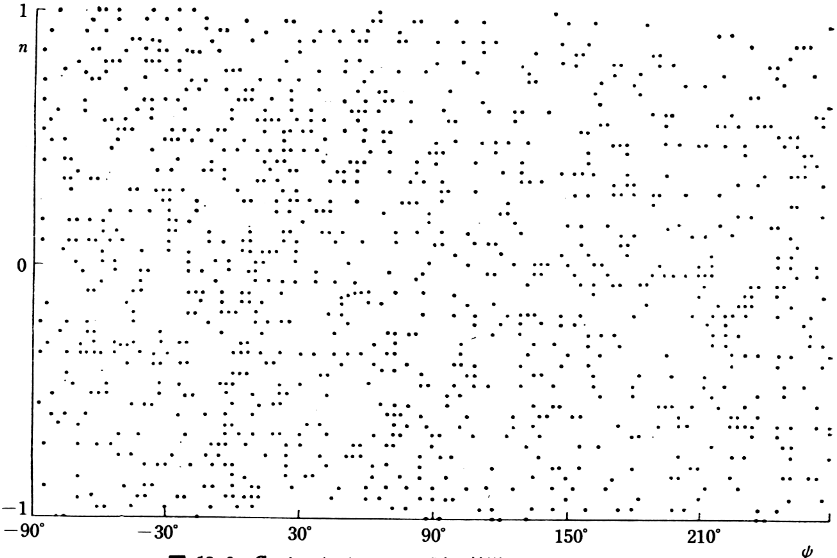


図 12.6　$C=1$，$\Lambda=1.8$での，同一軌道の場の周期ごとの点

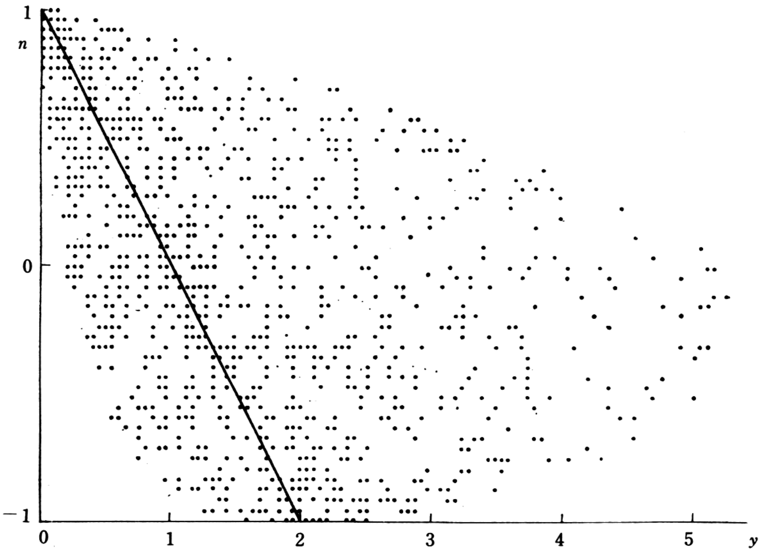


図 12.7　$C=1$，$\Lambda=1.8$ での，(n, y) 平面でのストカスティックな軌道

$$y+n=\text{定数}$$

が成りたつが，比較のため，図12.7ではこの保存則を直線で示してある．非共鳴項が考慮された図12.7の場合，H_0 は時間のストカスティックな関数になる．図の各点は，場の周期と同じ時間ごとに（$\Lambda \gtrsim 1$ の場合の）同一軌道でとられる（y, n）の値を表わしている．最後に，図12.8は局所不安定性の時間発展を図示したものである．

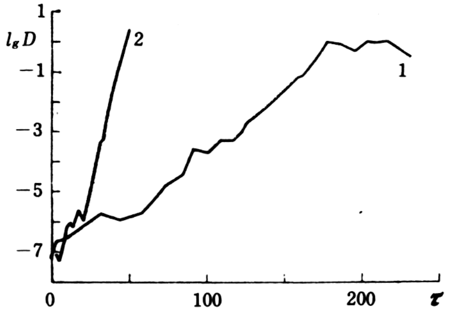


図 12.8 初期は隣接していた2つの軌道の距離 D の時間変化．場の周期を単位とし，$C=1$，(1) $\Lambda=0.9$，(2) $\Lambda=3$．

なお，これらの数値計算の結果，原子と場の共存系の相互作用定数 Λ が1になるところが境界になって，2個の運動の積分が完全な集合として存在する領域（$\Lambda \lesssim 1$）と，1個の運動の積分がストカスティックに消滅するため全エネルギーだけが運動の積分として残る領域（$\Lambda \gtrsim 1$）とが分けられるという事実も明らかにされている．

12.8 分子内でのエネルギー交換

極限的な2つの場合のエネルギー交換．励起分子．解離と分子結合．

この節では，分子内での結合について最近発展した新しい方向の研究を簡単に概観する．

解離現象，たとえば，単一分子の反応で見られる解離現象は，次の2段階の過程を含むと考えられる．すなわち，エネルギーが何らの方法で振動の自由度に移行する過程と，分子内エネルギー交換を通じてエネルギーが他の自由度から1つの臨界モードに集積する過程とである．この後者の過程が，化学反応の起る条件を作り出すのである．分子内の振動する自由度の励起過程を記述するために2つの両極端な方法が考えられている．その1つはスレーターの理論であって，分子の自由度に等しい数の準規準振動を考えることに基礎を置く [174]．この理論では，モード間のエネルギーの移動は無視される．これに対して，RRKM理論では [175]，逆のことが仮定される，すなわち，，エネルギーの速やかな緩和過程が全ての振動の自由度で起ること，また，エネルギーは統計力学の法則にしたが

って，ある分布になることが仮定される．実際の実験では，これら両極端の理論の結果が両者とも，実験条件に応じて現われる．古典系のストカスティシティの理論によれば，この場合，現実にどのようなことが起きているのかが少なくても原理的には解明できる．

このことを見るために，相互作用する非線型振動子の系を考えてみよう．系のエネルギーが充分に小さいとき，つまり，$E<E_c$ のときは，運動の積分が自由度の数だけ存在し，また，系の運動はこの数の準規準振動から成ると考えられる（しかし，実際にこの状態を具体的に記述することは簡単ではない）．したがって，この運動にはスレーターの理論が適用できる． 一方，$E>E_c$ のときには，幾つかの運動の積分が消滅し，ストカスティックな運動が発生する．さらに，運動の積分が全て消滅してしまうと（無論，全エネルギーは例外である），系の混合時間は極めて短くなる．この領域では，RRKM 理論が成り立つと考えられる．このようにして，現実に生じている現象が，運動の積分の消滅および運動のストカスティック化，さらには，自由度による相関消滅時間（混合時間）の相違と本質的に結びついていると考えられる．

上述の議論は対象の量子的性質とは無関係である．事実，すでに述べたように，分子の分光学の多くの結果や振動スペクトルの再編成現象は運動の積分の消滅によって生じるのである．強く励起された分子のスペクトルをスペクトルの再編成による効果とみなしてよく説明する簡単な理論の例がある，以下でこの理論について説明しよう．

剛体球のガスは，次の条件が満たされるならば，衝突によって混合をおこすことを 2.3 節〔(2.43) 式を参照〕でみた，

$$K=\rho/R\gtrsim 1. \tag{12.85}$$

ここで，R は剛体球の半径であり，ρ は 2 個の剛体球の平均的な中心間距離の半分である．多くの場合，R は分子内原子の相互作用の到達半径にとられる．その場合，2ρ は，相互作用する原子の中心間距離である．この距離は分子のエネルギー E に依存する．実験によると，$\rho=\rho(E)$ は，E が増加すると増大する．条件 (12.85) を考慮すると，臨界エネルギー E_0 は，

$$\rho(E_0)\sim R$$

によって決められる．つまり，このエネルギーのところで，分子の運動の積分の消滅がはじまる．安定な状態は，不等式 $K<1$ または $\rho<R$ が成り立つ場合に相当する，言い換えれば，相互作用の到達半径以内に原子が“密に閉じ込められ

ている”場合にあたる．これが分子の“普通の”状態である．このとき，分子内に自己矛盾のない平均ポテンシャルを導入することができ，また，各原子を完全な一組の量子数をもつ粒子として取り扱うことができる（これは原子核理論の独立粒子模型に対応する）．これとは逆に，不等式（12.85）が成り立つときは，各原子が“弱く”結合した状態に相当し，準位の分布が統計的になる．

準位の構造が統計的になるために起る現象で最も簡単なものの1つが，励起された分子のスペクトルの形に見られる．分子の吸収スペクトルは低周波数領域では異常な性質をもつことが知られているが，その異常な振舞は次のように説明される．いま，分子が，振動数ωの弱い外場のなかに置かれているとする．また，$\hbar\omega \ll \langle \varDelta E \rangle$であるとしよう．このとき，外場との共鳴によって遷移する確率は$P(E|\varDelta E=\hbar\omega)$に比例する．したがって，(12.52)式から，外場のエネルギーを吸収する強度は，

$$I(\omega) \sim \omega^{\text{定数}/h} \tag{12.86}$$

となり，振動数のべき関数に比例する．いまの場合，分子の励起エネルギーが増加すると，hも変化するので，吸収曲線の形も（12.86）式にしたがって変化することになる．

混合の効果がみられるもう一つの例は，分子の結合がはじまる段階での現象，たとえば，水素の前期解離状態の現象である．赤外領域の分光学において，水素の結合がはじまる段階では，スペクトル線の幅が異常に大きくなることが知られている．分子を形成する段階の原子の1つ，たとえば水素イオンを考えると，その水素イオンは複雑な摂動を受けるので，水素イオンの運動の積分の幾つかが消滅する（別の言い方をすれば，水素イオンの運動を規定する量子数の幾つかが消滅する）．これが水素イオンの運動にストカスティシティをもたらし，それが，また，振動スペクトルの異常な幅となって現われるのである．

多分，どんな型の分子結合の形成過程にも，運動の積分が消滅し，そして，ストカスティシティが発生するような領域が存在すると考えられる．しかし，その領域の大きさは，分子が形成される諸条件によって，異なるであろう．

第12章に関する注釈

1．運動の積分がストカスティックに消滅する場合のエネルギー準位の分布に関する分析は，文献［70］でスキップする電子のモデルを用いてはじめてなされた．その後，文献［145］で分析がひきつがれている．この問題についての総合報告は文献［17］と［18］に

みられる.

2. アインシュタインの量子化規則の基礎づけについては多くの研究がなされている.[176〜178, 155]. 厳密な量子論的補正を考慮すると，量子化規則は非常にむずかしくなる[178, 157, 179, 180]. 本文中での量子化規則の導出法は文献［145］に従ったものである.

3. 量子化規則（12.2）のある意味の“安定性”にふれておく. この“安定性”は，運動の積分が厳密にN個存在するという性質と同様の性質から出てくる. いま，軌道を“粗視化”したとすると，点qの近傍において無限小領域 dq をとることにかわって，ある有限の領域 Δq を考えることになる. この意味をもっと具体的に言えば，“粗視化”の結果，(12.9) 式の総和は，正確に閉じている軌道についてではなく，小さいが有限の領域$\Delta\Gamma$で閉じる軌道について和をとることになる. ところで，系の現実の軌道は，(摂動をうけていないので) 1つのトーラスから他のトーラスへ“飛び移る”ことはない. したがって，I_kを決める精度はやはり $\Delta\Gamma$ 程度になる. それ故，量子化規則（12.2）も，軌道を周期軌道とみなせる精度と同程度の範囲でしか決定できないであろう. このことが，また，厳密な表式（12.4）のかわりに，鞍点法で得られた漸近的表式（12.5）を用いることを正当化している.

4. この方向の主な（1965年までの）研究成果がポーターによって収集され，論文集として刊行されている［181］. この文献には，ポーターによるすぐれた解説も収録されている［182］. ウィグナー［158］とポーター，およびローゼンツバイク［182, 183］はランダム行列のガウス分布について分析している. ダイソンはランダムな，直交行列，ユニタリー行列，およびシンプレクティック行列の母集団を分析して，この種の研究を形式的に完成させた［159］. この種の研究の最近の成果は総合報告［184, 185］にみられる. 1940年代にワイルは群についての分布関数（測度）を導入し，ユニタリー母集団についての固有値の分布を導いている［186］. 実は，ランダム行列の母集団の考え方はこのワイルによる研究以来知られていたことである.

5. （12.30）式の積分は，閉じた軌道に沿って，すなわち，閉じた積分路に沿って実行されていることに注意する. また，可積分系の場合（12.1節）には，その積分路を，N次元の不変トーラス上の位相幾何学的に閉じた積分路に置き換えることも可能であった. この性質によって，計算が本質的に簡単になったことも事実である. しかし，いまの場合，不変トーラスが破壊されているので，積分に好都合な位相幾何学的積分路を導入することができない.

6. 実験的データもかなりでている. 最初のデータは，重い原子核の準位間隔の分布を分析して得られたもので，文献［187］に報告されている. このデータは準位間の反発という考え方を明確に支持している. これと同じような結論が，励起原子の電子の準位についても得られている. 後者の場合，充分に強いスピン一軌道相互作用のため，量子数 L と S が消滅するので，準位の分布が統計的になる.

準位の反発の規則性あるいは反発現象と系の力学的特性との関連性を実験的に決定することはむずかしい問題である. それは，非常に値の小さい ΔE の領域では分析の精度がどうしてもわるくなってしまうからである.

付録 1　混合性のビリヤード

ビリヤードのボール（粒子）が混合性の運動を行う可能性がある場合，そのビリヤードを混合性のビリヤードと呼ぶ．このとき，ストカスティックな軌道によって占められる領域が位相空間の一部だけである場合も含めて，そのように呼ぶ．ビリヤード粒子の運動の基本的なパターンはビリヤードの幾何学的性質によって決定される．ビリヤードは，ハミルトニアン形式の力学系の一般的性質を調べるうで，非常に明快でかつ便利なモデルである．しかし，ビリヤードの問題に関心をもつ理由はそれだけではない．ある与えられた力学系の問題とビリヤードの問題との間に1価の対応関係をつけられる場合が多いことも，その理由の1つである．端的に言えば，多くの力学的問題をビリヤードの問題に帰着させることができるということである（たとえば，第2.3節と第3.3節を参照）．この対応関係の考え方は次の事実にもとづている．いま，あるハミルトニアン形式の力学系の場合に，系の運動を記述する写像を構成すること（すなわち，運動の微分方程式を差分方程式の形に変換すること）ができたとする．このとき，その写像とビリヤード粒子の写像の構造が同じになるように，ビリヤードの幾何学的性質を選ぶことができるという事実である．負の曲率をもつビリヤードが，ストカスティック軌道をもつ力学系の例として最もわかり易いことが明確になると，またたく間に，ビリヤードを力学系として取り扱うことが流行になった．これに関連して，はやくも1898年から負の曲率の空間における測地線の研究を始めていたジャク　ハダマード(Jacque Hadamard)の予言的な言葉を引用しておく，“もしも，負の曲率の空間における運動と類似の運動が，力学の問題，とくに，天体力学の領域で存在するならば，惑星系の安定性に関する全ての定式化を再検討する必要があるだろう”［209］．

負の曲率をもつビリヤードについてはすでは第2.3節で議論した．壁が負と正の両方の曲率をもつ場合には，粒子の運動は，粒子が散乱領域と集束領域に存在する時間の比によって規定される．これらのことは，初めホップ（E. Hopf）によって示唆され［32］，後にブニモブィッチ（L.A. Bunimovich）が詳しく解析した結果，確認されたことである．さらに研究が進み，集束型の弧と直線部分だけの壁のビリヤードでも，ストカスティッテイが成長することが明らかになった［189, 190］．このようなビリヤードの例を図A1.1に示した．〔“スタディアム”型ビリヤード（図A1.1(a)）は文献（191）でも考察されている，また，図A1.1(c)の形のビリヤードについては，弧の部分の長さに無関係に，ストカスティシティが存在することがブニモブィッチによって証明されている［188］.〕

ビリヤードの壁が散乱型でないにも拘わらず，ストカスティシティ（軌道の不安定性）が生じる理由は次のように“スタディアム”型ビリヤードの例を考えるとよく理解できる．

細い軌道のビームが壁の弧の部分に入射するとしよう．ビームを構成する各々の軌道は，弧で反射した直後に，まず，集束する．その集束点（焦点）を通過した後に，軌道の束は発散する形で壁の直線部分を運動する．この直線部分の距離が長ければ長い程，ビームの散らばる度合（拡がり）は大きくなる．そして，散らばったビームはやがて反対側の弧の部分に入射する．このような過程が操り返えされる結果，局所的不安定性が生じると考えられる．

以下では，上述の議論をさらに定量的に分析して，解析的な結論を導こう [18]．以下の解析は，散乱型のビリヤードと集束型のビリヤードの両者の場合に同じ様に適用できる．

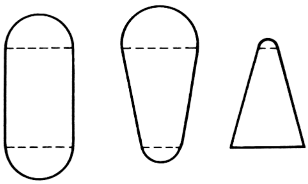


図 A 1.1 ストカスティックな粒子軌道をもたらす非散乱型ビリヤードの例

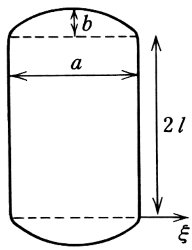


図 A 1.2 集束型の弧と直線部分をもつビリアード

はじめに，図 A1.2 に図示した形のビリヤードを考えよう．3.3 節で考察した“スキップする電子”の場合からの類推で，壁の弧の部分の曲線を表わす方程式は次式で与えられる，

$$\chi=\chi(\xi),\ \ \xi=\left\{\frac{x}{a}\right\},\ \ \max\chi(\xi)=\frac{b}{a}. \qquad (A1.1)$$

ここで，座標 ξ とパラメーター a および b の幾向学的意味は図 A1.2 に示してある．問題の簡単化のために，パラメーターの間に次の大小関係が成立するとしよう，

$$b\ll a\ll l. \qquad (A1.2)$$

ただし，l はビリヤードの壁の直線部分の長さである．

粒子が壁によって何回か反射を操り返すときの軌道の振舞を考察するのであるが，後の解析を容易にするために，その記述法を次のように工夫する．まず，壁の1つの側面（たとえば，左側の直線部分）から反対側の側面（たとえば，右側の直線部分）に到達するまでの（その間に，上下の弧の部分による反射が幾度か起るかもしれない）軌道を一枚のスタディアム形の紙面に描く．つぎに，反対側の側面（石側の直線部分）で反射した左側の側面に到達するまでの軌道を第2のスタディアム形の紙面に描く，以降同じことを第3，第4，…，の紙面に操り返えす．こうして軌道を書き入れた第1，第2，…の紙を順につみ重ねてから，第1と第2の紙面については右側の辺をのりでつなき合せ，第2と第3の紙面については左側の辺をのりでつなぎ合せる，以下同様に，一枚おきに左右の辺をのりでつなぎ合せたものを作る（図A1.3を見よ）．そして，“アコディオンのひだ”をのばすように，第1の紙面と最後の紙面を手にとってひろげると，アコディオンのひだに粒子の

軌道が射影されたものができあがる，ここで本質的な点は，粒子が1つの側面の壁から反射して反対側の側面に到達するまでの軌道が同一の紙面に射影されていることである．

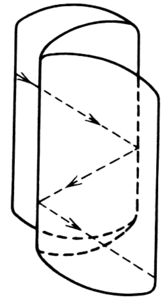


図 A 1.3 “アコーディオンのひだ”の面の形成

さて，このアコディオンのひだをひきのばして，その上に一価的に射影された軌道を詳しく調べよう（図A1.4を参照）．これまでの議論は厳密であったが，以下では幾つか簡単化をはかろう．スタディアムが対称である場合を考えて，上述のアコディオンのひだを，x 軸を境にして，折り重ねるると，図 A1.4 に描かれている軌道は図 A1.5 図のようになる．この操作によって，問題が“キャタピラ”形のビリヤードの問題に移ったことになる．第2の簡単化は，不等式（A1.2）を考慮することによってなされる．この不等式が成り立つ場合には，粒子が1つの側面の壁から反対側の側面に到達するまでの間，粒子が2回以上，連続的に上下の弧の部分で反射することはまずないので，このような軌道は無視して差し支いない．

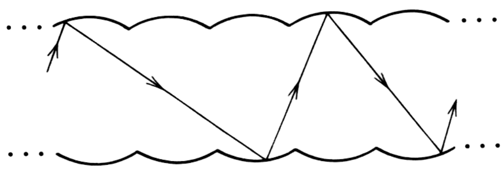


図 A 1.4 “アコーディオンひだ”の面の引き伸ばし

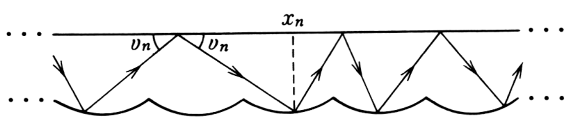


図 A 1.5 ひだの面から“キャタピラー”型ビリヤードの形成

これだけの準備をすると，問題の解析方法はスキップする電子の場合と同様になる．図A1.5に示した変数（x_n, θ_n）を使うと，これらは次の関係式を満たす．

$$\theta_{n+1}=\theta_n-2\arctan\chi'(\xi_n),\quad x_{n+1}\approx x_n+l\cot\theta_{n+1}. \qquad \text{(A1.3)}$$

あるいは，

$$\theta_{n+1}\approx\theta_n-2\chi'(\xi_n),\quad \xi_{n+1}\approx\xi_n+\frac{l}{a}\cot\theta_{n+1}. \qquad \text{(A1.4)}$$

これらの方程式から，位置のひき伸ばしパラメーターとして，

$$K_0=\left|\frac{d\xi_{n+1}}{d\xi_n}-1\right|=\frac{2l}{\alpha}\left||\chi''|\frac{1}{\sin^2\theta_{n+1}}\right|, \qquad \text{(A1.5)}$$

が与えられる．したがって，系がストカスティックになるための条件は，

$$K=\frac{2l}{a}\max\chi''\gg1$$

表わせる．さらに，無次元Kエントロピーは，

$$h \approx \log K = \log\left(\frac{2l}{a}\max\chi''\right) \tag{A1.7}$$

となる．

いま，ビリヤードの壁の曲線部分が放物線，

$$\chi(\xi) = \frac{4b}{a}\xi(1-\xi), \quad \max\chi(\xi) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{a}, \tag{A1.8}$$

で与えられる場合を考えると，表式（A1.6）と（A1.7）は，それぞれ，次のようになる，

$$K = \frac{16ab}{a^2} \gg 1, \quad h = \log\frac{16lb}{a}. \tag{A1.9}$$

ストカスティシティのしきい値は，条件 $K \approx 1$ で与えられる．これは，（A1.9）式によると，

$$16\frac{l}{a}\frac{b}{a} \gtrsim 1,$$

であれば，系に混合性が発生しはじめることを意味する．

（A1.9）式のような具体的な評価式に達する前の写像方程式（A1.4）の導出過程や分析過程には，壁の曲線部分の方程式の具体的な形が現われていないことを指摘しておく．

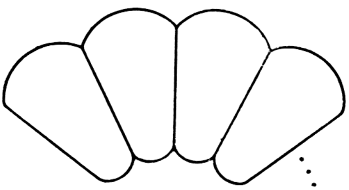


図 A 1.6　ひだの面からの“扇子”型ビリヤードの形成

図 A1.1(c)に図示したような，これまでのものよりは複雑な形のビリヤードについても上述と同様の議論が可能である．その場合には，“ひだ”をひきのばすと，“扇子”の形になる（図 A1.6を見よ）．粒子の軌道の分析とか写像方程式の導出は上述と同様な方法でできる．

最後に議論を完結するために，混合性のビリヤードの粒子の運動を分析しておく．ストカスティシティの条件（A1.6）式または（A1.9）式は満たされているとする．すると，θの小さな変化は，コルモゴロフの拡散方程式

$$\frac{\partial w(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left\langle\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right\rangle w(\theta,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\left\langle\frac{\langle\Delta\theta\rangle^2}{\Delta t}\right\rangle w(\theta,t)\right) \tag{A1.10}$$

で記述可能となる，ここで，$\Delta\theta$は1回の写像によるθの変化量であり，Δtは写像と写像の間の時間間隔である．さらに，関数wは次の境界条件，

$$w\left(-\frac{\pi}{2},\ t\right) = w\left(\frac{\pi}{2},\ t\right), \tag{A1.11}$$

を満足しなければならない．さて，$\Delta\theta$は，（A1.4）式と（A1.8）式により，

$$\Delta\theta = \Delta_{n+1} - \theta_n = 2\chi'(\xi) = -8\frac{b}{a}(1-2\xi),$$

と書ける．ただし，ξ_nの添字nは記号の簡素化のため省略した．図A1.5から，次の関係

式が成り立つことがわかる,

$$\Delta t=\frac{l}{2v}(|\tan\theta_n|+|\tan\theta_{n+1}|),$$

$$\approx\frac{l}{v}\left(|\tan\theta|+\frac{1}{2}\frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta,}\right),$$

$$=\frac{l}{v}|\tan\theta|\left(1-\frac{8b}{a}\frac{1-2\xi}{|\sin 2\theta|}\right).$$

ここで, v は, 粒子の速度の x 方向の成分である. また, θ_n の添字 n を省略した. ξ の分布が領域 (0, 1) で一様であることを考慮すると, 小さな量 χ' の2次の項までの近似で, 次の関係式が得られる,

$$\left\langle\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right\rangle=-\frac{32}{3}\frac{2^2v}{a^2l}\frac{1}{\sin^2\theta},$$

$$\left\langle\frac{(\Delta\theta)^2}{\Delta t}\right\rangle=\frac{64}{3}\frac{b^2v}{a^2l}\frac{1}{|\tan\theta|}. \tag{A1.12}$$

なお, この (A 1.12) 式は, 方程式 (A 1.3) から直接的に導くことも可能である. また, (A1.12) 式が, 力学的平衡状態で成立する一般式,

$$\left\langle\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\langle\frac{(\Delta\theta)^2}{\Delta t}\right\rangle \tag{A1.13}$$

を満たしていることも明らかである. (A1.12) 式と (A1.13) 式を用いて, (A1.10) 式を書き換えれば,

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}D(\theta)\frac{\partial w}{\partial\theta}, \tag{A1.14}$$

が得られる, ただし, $D(\theta)$ は拡散係数であり,

$$D(\theta)=\frac{64}{3}\frac{b^2v}{a^2l}\frac{1}{|\tan\theta|}, \tag{A1.15}$$

で与えられる. この (A1.15) 式から, 分布が平衡分布 $w(\theta)$ に達するまでの特性時間は,

$$\tau_D=\frac{l}{v}\frac{3}{32}\frac{a^2}{b^2}, \tag{A1.16}$$

と書くことができる. 平衡分布 $w(\theta)$ の具体的表式は (A1.14) 式で $\partial w/\partial t=0$ と置いた方程式を境界条件 (A1.11) のもとで解くことによって求められ,

$$w(\theta)=\frac{1}{\pi\log 2}|\log\cos\theta|,\ \left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right), \tag{A1.17}$$

となる. なお, この式の係数は, $w(\theta)$ が規格化条件,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\, w(\theta)=1,$$

を満たすように定められた.

付録 2　アーノルド拡散

アーノルド［26］は，自由度の大きい（$N \geq 3$）系に固有のある普遍的な不安定性を発見した．ここで普遍性という概念は，不安定性が任意の非線型系で生じることを意味する（当然のことながら，ここでもこの後でも同様であるが，任意の系ということは，ある縮退した系を例外として，任意の力学系を意味する）．一般に，不安定性は次のように定義される．いま，系がハミルトニアンとして，

$$H = H_0(I_1, I_2, \cdots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \theta_1; \cdots; I_N, \theta_N) \tag{A2.1}$$

をもつとしよう．ただし，εは小さなパラメーターである．もし，$\varepsilon=0$ であるならば，系（A2.1）は可積分系であり，$I_1, I_2, \cdots, I_N$ が全て運動の積分であるとする．摂動を含む系（A2.1）の解（$I_1(t), I_2(t), \cdots, I_N(t)$）を$N$次元のベクトル記号 $\mathbf{I}$（t）で表わして，もしも，不等式

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(0)| \ll 1 \tag{A2.2}$$

が，$t < \tau_D$ の間，成立する場合，系（A2.1）は，時間τ_Dの間，安定であると言う．アーノルドによって見出された不安定性が生じる場合は，充分に大きいtのとき，不等式（A2.2）が成り立たなくなる．その不安定性に対して拡散という言葉が使われるのは，不安定性の性質がストカスティックだからである．アーノルド拡散はネコロシエフ（N.N. Nekhoroshev）（厳密な結果を出している［192］）とチリコフ（数値計算で定性的な結果を導いている）によって詳しく調べられている．以下では，アーノルデ拡散の幾つかの概念的特徴を論じよう〔なお，文献［193］を参照〕．

はじめに，$N=2$ の場合を考えよう．2個の自由度が相互作用するときの非線型共鳴については1.3節で述べた．共鳴条件は，

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0, \tag{A2.3}$$

で表わされた〔(1.36) 式を見よ〕．ここで，n_1 と n_2 は正または負の整数である．振動数 ω_1 と ω_2 は，I_1 および I_2 の関数である．(I_1, I_2) を座標とする空間よりも (ω_1, ω_2) を座標とする空間を考えた方が便利である．後者の空間では，共鳴条件（A2.3）は直線の群を表わす（図A 2.1）．これらの直線とエネルギー＝定数という曲面との交点が共鳴点である．これらの共鳴点の近傍での運動は有効ハミルトニアン$\bar{H}$〔(1.37) 式をみよ〕による非線型共鳴方程式で記述される．

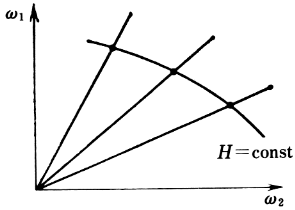


図 A 2.1　$N=2$ での共鳴

非線型共鳴はそれぞれセパラトリックスをもってい

るが，これらのセパラトリックスは，非共鳴項（5.1節と5.3節を参照）などが摂動として作用するために，ストカスティックに消滅する．これは，また，共鳴トーラス（これは，図A2.1の交点に対応する）が破壊されてストカスティックな層に変化することを意味する．非共鳴項が摂動として作用する場合，層の幅は，

$$\frac{\Delta H}{H_c} \approx \varepsilon \exp\left(-\frac{\pi\nu}{2\Omega}\right), \quad \nu \gg \Omega, \tag{A2.4}$$

で与えられる〔(5.18) 式を見よ〕．ここで，ν は摂動の振動数であり，Ω は摂動をうけた微小振幅の振動運動の振動数である．

いまの場合は，有効ハミルトニアン $\bar{H}$ によってひき起こされる非線型共鳴の消滅過程を取り扱っていることに相当するので，微小振幅の振動の振動数は位相振動の振動数 Ω に等しく，表式（1.32）で $\alpha \approx 1$ と置いた関係式により与えられ，

$$\Omega \approx \omega_0\, \varepsilon^{1/2} \tag{A2.5}$$

となる．ここで，ω_0 はハミルトニアン H_0 による非摂動運動の振動数である．非共鳴項による摂動の振動数は近似的に $2\omega_0$ である．つまり，$\nu \approx 2\omega_0$ である．この関係と（A2.5）式を（A2.4）式に代入すると，次式を得る，

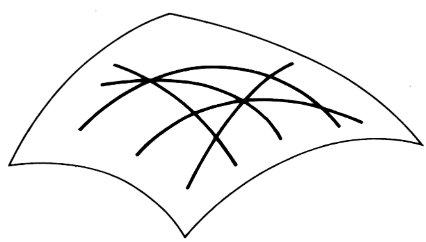
$$\frac{\Delta H}{H_c} \approx \varepsilon \exp\left(-\frac{\pi}{\varepsilon^{1/2}}\right), \tag{A2.6}$$

ところで，$N=2$ の場合には，トーラスは位相空間を二つの部分に分割する（1.4節を参照）．したがって，破壊されたトーラスは他の安定なトーラスから隔離して存在できる．これは，任意の時刻において，不等式（A2.2）が成り立つ領域が存在すること，すなわち，永続的な安定性が実現し得ることを意味する（これは，共鳴が重複しない限り正しい）．

つぎに，$N \geq 3$ の場合を考えよう．今度は，共鳴トーラスが位相空間を2つの部分に分割できない（1.4節を参照）．それで，方程式，

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \cdots + n_N\omega_N = 0$$

によって規定される共鳴多様体は複雑に交叉するようになる（図A2.2を見よ）．これらの多様体は，位相空間上の交叉する共鳴トーラスに対応する．これらの共鳴トーラスが非共鳴項の摂動によってストカスティックな層に変えられると，それらの薄い層の網状組織が全位相空間を張りめぐることになる．このとき，系の粒子の運動は，ある無摂動運動から出発しても，その網状組織を順次通過することによって，遠く離れ運動に移行できる，つまり拡散することが可能になる．これがアーノルド拡散と言われる過程



図A2.2 定エネルギー面上の共鳴曲線（$N=3$）

である.

拡散時間 τ_D てを評価してみよう. エネルギーの拡散係数に対しては,

$$D\approx\frac{H_c^2}{\tau_D}\approx\frac{(\varDelta H)^2}{\tau} \tag{A2.7}$$

が成り立つ. ここで, $\varDelta H$ は（A2.6）式で与えられるエネルギーの幅であり, また, τ は, エネルギーが $\varDelta H$ だけ変化するのに要する特性時間である. この時間がストカスティックな層のなかではどこも同一の値になると仮定すると, その時間の平均値として, $\tau\approx1/\Omega$ すなわち, 位相振動の周期をとることができる. このことと（A2.5）式を考え合せると,

$$\tau\approx\frac{1}{\varepsilon^{1/2}\omega_0}, \tag{A2.8}$$

を得る.（A2.6）式と（A2.8）式を（A2.7）式に代入すれば, 次式が導かれる,

$$\tau_D\approx\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\varepsilon^{5/2}}e^{\pi/\varepsilon^{1/2}}. \tag{A2.9}$$

この（A2.9）式によると, τ_D は, ε が小さくなるとき, 指数関数的に増大する. この τ_D は安定性が破壊されるまでの時間である.（A2.9）式はかなり雑な評価式であるので, 系の自由度の数に依存しない形になっているが, ネコロシェフは詳しい分析を行なって, 次のような評価式を導いている,

$$\tau_D\approx\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\varepsilon}e^{1/\varepsilon^a}. \tag{A2.10}$$

ただし,

$$a=\frac{2}{12\zeta+3N+14},\quad \zeta\gtrsim\frac{1}{2}N(N-1), \tag{A2.11}$$

である. ネコロシェフの結果〔(A2.10) 式と（A2.11）式〕にみられる重要な特徴は, a が N に依存することである. N が大きくなると, べきの指数 a が急激に小さくなり, 拡散時間（緩和時間）がかなり短くなる.

τ_D の定性的評価と数値計算の種々の例やアーノルド拡散に関連した物理現象が, チリコフによる総和報告［48］と文献［193］て詳しく議論されている.

付録 3　散逸力学系におけるストカスティシティ性

A3.1　ストカスティシティと乱流

本書の全般を通じて考察された力学系がハミルトニアン系であったことは本質的なことである．この力学系では，位相空間の体積が運動の過程で保存する．位相空間での混合運動またはストカスティックな運動は同時に，位相空間内の乱流運動として特徴づけることができた．互いに相互作用する波動系のような連続体の系で発生するストカスティシティを分析すると，混合運動への移行は，やはり，系の座標空間での乱流運動への移行に対応することがわかる．

一方，散逸的な連続体が何か特異な運動をするとき，往々にして乱流という言葉が使われるので，ここで，ストカスティシティと乱流との関係を少し述べてみよう．

いま，ある流体の運動が，通常の力学変数と無次元の特性パラメーター Y（たとえば，レイノルズ数，レイリー数など）によって記述される場合を考えると，そこでは次のようなことが生じる可能性がある．Y の値が小さい間は，流体の運動は安定である．しかし，Y の値が増大してある値 Y_1 になると，流体の運動は不安定になり，$Y>Y_1$ では新しいタイプの運動がおこる．そして，Y と Y_1 との差 $Y-Y_1(>0)$ の値が小さい間は，この新しいタイプの運動がそのまま安定を保つ．

一般に，流体力学的な系は，上述の Y のように，その値が $Y_1, Y_2, \cdots$ になるごとに流体の運動の質的変化をともなうようなパラメーター Y をもっている（これらの質的変化は分岐現象と呼ばれる）．この一連の分岐現象の結果，Y がある値 Y_c より大きくなると，運動が不規則かつストカスティックになる．この運動が乱流である．そして，一般に，$Y_c>Y_1, Y_2, \cdots$，が成立する．このような乱流の多くの例は文献 [194] にみることができる．

事実，安定な層流運動が乱流運動に移行する条件は，位相空間での運動がストカスティックまたは混合的になるための条件と同じになる．ただ，流体力学的な系では，乱流の発生の原因が運動方程式の散逸性にあるところが異質な点である．この散逸性のため，この系はハミルトニアン形式では記述できない．したがって，位相空間の体積要素が時間的に保存しない．しかし，記号力学の方法を利用すると，位相空間の体積要素の保存則に頼らなくても，ストカスティックな運動の発生機構について種々分析することが可能になる．また，これと同じことは，やや厳密性を欠くが，第 2 章から第 4 章にかけて述べたのと同様な方法でもおこなうことができる．

A3.2　ストレンジアトラクター

ストカスティシティの条件を求めることのできるモデルのなかで最も単純なモデルは非ハミルトニアン系であった(第2章をみよ)．それにも拘わらず，散逸系の研究が精力的におこなわれるようになったのは，ローレンツの論文［195］が発表された後からである（ローレンツ型のモデルとこれに関連したモデルについては文献［196］と［197］に概説されている)．ローレンツの研究は，熱対流の過程で発生する乱流をいわゆる有限次元近似で分析することにあったが，その数値解析の結果は，散逸系でも一定の条件を満たすモデルの場合にはストカスティックな運動が発生することを示した．このストカスティックな運動（すなわち，乱流運動）への移行は解の一連の分岐現象を通じて起るものであった〔文献［198］をみよ〕．しかし，そのストカスティックな運動は，極めて異常な構造をもっていた．以下で，これについて述べよう．

まず，ハミルトニアン系を考える．系の運動は混合性をもつものとしよう．位相空間上に系の異なった状態に対応する幾つかの点の集合から成りまた有限の体積をもつ“液滴”を考える．このとき，系の運動とともに，液滴も位相空間上の許される全ての領域にひろがっていく．測度（初めの液滴の体積）は保存するので，時間が経過した後，枝分れした液体の各部分は一定の密度をもっている．長時間経過すると，枝分れした液体は位相空間の全域にひろがるであろう．

一方，散逸系を考えると，事情は全く異なる．この場合には，液滴から出発した軌道を最終的には全て吸引してしまう極限的かつ不変的な集合が位相空間上に存在する．したがって，系の運動は，漸近的($t\to\infty$)には，この極限的集合に到達する．この集合上でも，散逸系のストカスティックな運動が発生する．その場合，この集合のハウスドルフ次元数は全位相空間の次元数より小さくなる（これは後で示される)．散逸系のストカスティックな運動にみられるこの極限的で吸引的な集合は“ストレンジアトラクター”という名称で呼ばれている［199］．

ハミルトニアン系では．“ストレンジアトラクター”が全位相空間にひろがるような極限的状況が現われる（これについて後で証明する)．振動論の問題を例にとって，［200, 201, 202］ストレンジアトラクターの性質とそれが現われる条件を考察しよう．

A3.3　ストレジアトラクターのモデル

4.1節では，ハミルトニア形式の物理系で見られる1つのユニバーサル写像を取り扱った．その写像は，作用－角変数を用いて，次の形のハミルトニアン(4.4)から構成される，

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\theta)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT).\qquad\text{(A3.1)}$$

また，このハミルトニアンから次の運動力程式（4.5）が導かれる，

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V(I,\theta)}{\partial\theta}f(t),\qquad \dot{\theta}=\omega(I)+\varepsilon\frac{\partial V(I,\theta)}{\partial I}f(t). \tag{A3.2}$$

ここで，$\omega(I)$ と $f(t)$ はそれぞれ，

$$\omega(I)=\frac{dH_0}{dI},\qquad f(t)=T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

である．分析を簡単にするために，V は I には依存しないと仮定して，$V=V(\theta)$ と置くと，（A3.2）式は次のようになる，

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}f(t),\qquad \dot{\theta}=\omega(I). \tag{A3.3}$$

これを写像の方程式〔(4.7)〕の形に書くと，

$$\bar{I}=I-\varepsilon\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}T,\qquad \bar{\theta}=\theta+\omega(\bar{I})T. \tag{A3.4}$$

となる．

さて，ここで，（A3.1）式の系に散逸項を導入しよう．ハミルトニアン $H_0(I)$ の無摂動運動のとき，系は $I=I_0$ の安定なリミットサイクル運動をしているとする．この運動に次のように散逸項が加えられるとしよう，

$$\dot{I}=-\gamma(I-I_0),\qquad \dot{\theta}=\omega(I). \tag{A3.5}$$

ただし，γ は散逸係数である．この（A3.5）式と（A3.3）式を合成した方程式，

$$\dot{I}=-\gamma(I-I_0)-\varepsilon\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}f(t),\qquad \dot{\theta}=\omega(I), \tag{A3.6}$$

を考える．これらは，無摂動状態で $I=I_0$ の安定な（吸引的）リミットサイクルの運動に外的な摂動が作用した場合を記述する．

一般に $V(\theta)$ は θ の周期関数であるが，ここではそれを，

$$V(\theta)=\frac{I_0}{T}\cos\theta$$

と簡単な形にとろう．上式で，係数 I_0/T が $V(\theta)$ の次元を定めているので，$V(\theta)$の大きさの程度を表わすパラメーターは無次元量になる．さらに簡単化をはかるために，$\omega(I)$ が次のような I の線型関数であると仮定する，

$$\omega(I)=\omega_0\left(1+\alpha\frac{I-I_0}{I_0}\right).$$

上式において，α は，4.1節のときと同じく，非線型性の程度を表わす無次元パラメーターの役割をはたす〔(4.10) 式をみよ〕．また，ここで，次のような無次元量を導入して置こう，

$$y\equiv\frac{I-I_0}{I_0},\quad x\equiv\frac{1}{2\pi}\theta,\quad \Omega\equiv\omega_0T,\quad \Gamma\equiv\gamma T. \tag{A3.7}$$

方程式（A3.6）を時間間隔 T にわたって積分すると，その結果は写像の形に書けて，

$$\bar{y}=e^{-\Gamma}(y+\varepsilon\cos 2\pi x),$$

$$\bar{x}=x+\frac{1}{2\pi}\Omega(1+\alpha\mu y)+\frac{1}{2\pi}K\mu\cos 2\pi x,\ \mathrm{mod}\ 1, \qquad \text{(A3. 8)}$$

となる．ここで，変数 (x, y) は，$f(t)$ に含まれる δ 関数のパルスの直前における値を表わし，また，変数 $(\bar{x}, \bar{y})$ は，T だけ時間を移動する時間移動の演算子を変数 (x, y) に作用させて得られる値である．さらに，上式中の新しい記号，K と μ は，

$$K=\varepsilon\alpha\Omega, \qquad \mu=\frac{1-e^{-\Gamma}}{\Gamma}, \qquad \text{(A3. 9)}$$

を意味する．このうち，パラメーター μ は散逸性の目安になる．たとえば，$\Gamma=0$ のとき，$\mu=1$ となり，方程式系（A3. 8）は，

$$\bar{y}=y+\varepsilon\cos 2\pi x,$$

$$\bar{x}=x+\frac{1}{2\pi}\Omega(1+\alpha y)+\frac{1}{2\pi}K\cos 2\pi x,\ \mathrm{mod}\ 1, \qquad \text{(A3. 10)}$$

となる．これは，ハミルトニアン系の写像である〔(A3. 10）式と（4. 9）式を比較してみよ〕．

方程式系（A3. 8）を分析するには，第 4. 1 節と同様の方法を用いればよい．まず，

$$\varepsilon\ll 1, \quad \alpha\ll 1.$$

の場合をみてみよう．さらに，もし，$K\ll 1$ であれば（これは，$\mu\lesssim 1$ であるので，$K\mu\ll 1$ を意味する），（A3. 8）式の系の運動は安定であり，何らの異常性も現われない．しかし，

$$K\mu\gg 1 \qquad \text{(A3. 11)}$$

であると，（A3. 8）式から，不等式，

$$\left|\frac{\delta\bar{x}}{\delta x}-1\right|\approx K\mu|\sin 2\pi x|\gg 1, \qquad \text{(A3. 12)}$$

が得られる．これは，位相変数 x が次の 2 点，

$$x^{(1)}=0 \ \text{と}\ x^{(2)}=\frac{1}{2}, \qquad \text{(A3. 13)}$$

を中心とする 2 つの微小領域以外の値をとると，x の運動に速やかな混合性が生じ，x が局所的に不安定になることを意味する．

もしも，$\Gamma=0$ であれば，ストカスティシティの条件（A3. 11）式は，通常の条件 $K\gg 1$ に移行することに注意する．Γ が小さい場合にも，これと同じことが言えることは明らかである．逆に，$\Gamma>1$ の場合には，条件（A3. 11）は，定義式（A3. 9）によって，次の不等式になる，

$$\frac{K}{\Gamma}\gg 1. \qquad \text{(A3. 14)}$$

一方，ストカスティシティのしきい値は関係式，

$$K\mu\approx 1 \qquad \text{(A3. 15)}$$

で与えられる．もしも，$\Gamma\gg 1$ であると，上記の関係式は，

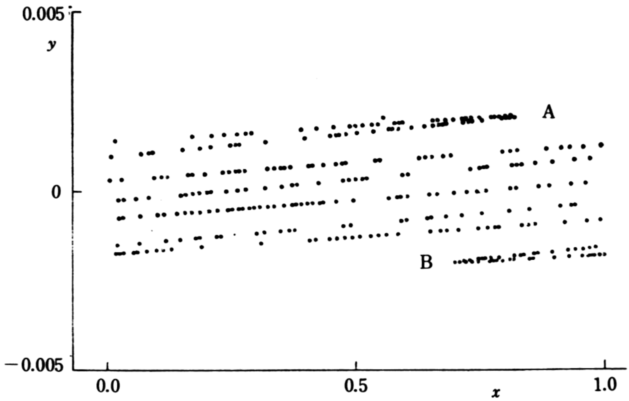


図 A 3.1 パラメーター $\Gamma=5$, $\alpha=0.3$, $K=9.03$ でのストレンジアトラクター

$$K \approx \Gamma, \tag{A3.16}$$

を意味する.（A 3.15）式と（A 3.16）式はともに散逸系のストカスティシティのしきり値を定める条件である.

文献［200, 201］の数値計算は，ストカスティシティの条件として（A3.14）式が妥当であること，そして，この条件が成り立つ場合，写像（A3.8）式で与えられる軌道上の点の集合が典型的なストレンジアトラクターの形をとること（図 A3.1を見よ）を示している．また，これらの文献には，2つの軌道間の距離，

$$D(t)=\{[x_1(t)-x_2(t)]^2+[y_1(t)-y_2(t)]^2\}^{1/2}$$

の局所不安定性の時間発展（図A3.2）と相関関数（図 A3.3），

$$R(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\cos 2\pi x_{n+m}\cos 2\pi x_n,$$

が数値計算で求められている．図A3.1と同じ構造のストレンジアトラクターが文献［77］でも見出されている，なお，この文献の場合，それは，安定なリミットサイクルの消滅の結果として得られている.

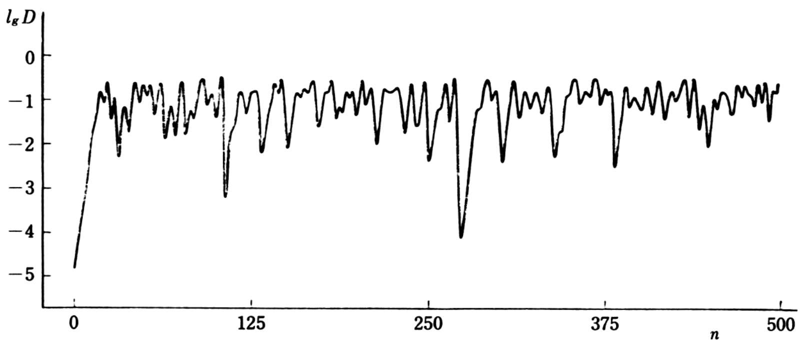


図 A 3.2 図 A3.1 の場合の局所不安定性の発展

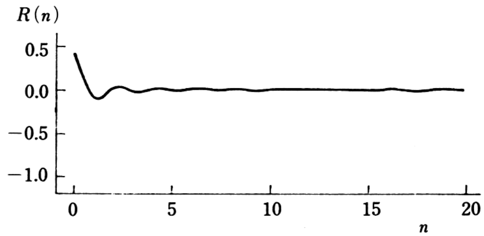


図 A 3.3　図 A3.1 の場合の相関関数

図A3.1の点 A と B はストレンジアトラクターの境界を意味する点である．これらの位置は特異点の式（A3.13）から次の方法によって求められる．$\Gamma\gg1$ の場合を考えよう．写像の方程式（A3.8）に特異点の式（A3.13）を代入すると（$e^{-\Gamma}$ の精度で），

$$y_A=\bar{y}(x=x^{(1)},\ y=0)=\varepsilon e^{-\Gamma},$$

$$y_B=\bar{y}(x=x^{(2)},\ y=0)=-\varepsilon e^{-\Gamma},$$

$$x_A=\bar{x}(x=x^{(1)},\ y=0)=x^{(1)}+\frac{1}{2\pi}\Omega+\frac{K}{\Gamma}\cos 2\pi x^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\Omega+\frac{K}{\Gamma}$$

$$x_B=\bar{x}(x=x^{(2)},\ y=0)=x^{(2)}+\frac{1}{2\pi}\Omega+\frac{K}{\Gamma}\cos 2\pi x^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\Omega+\frac{1}{2}-\frac{K}{\Gamma},$$

を得る．これらの関係式から，スレンジアトラクターの幅に対する評価式として次式が得られる，

$$\begin{aligned}\Delta y&=\max y-\min y,\\&=y_A-y_B=2\varepsilon e^{-\Gamma}.\end{aligned}$$

このストレンジアトラクターの内部における曲線の方程式が，$e^{-\Gamma}\ll1$ の場合には，容易に定められる．（A3.8）式の初めの方程式は，この場合，

$$\bar{y}\approx e^{-\Gamma}\,\varepsilon\cos 2\pi x$$

となる．この式と（A3.8）の第2式とから $\cos 2\pi x$ を消去すれば，方程式

$$\bar{x}\approx\frac{\alpha\Omega}{2\pi\Gamma}e^{\Gamma}\bar{y}+\frac{1}{2\pi}\Omega,\ \ \mathrm{mod}\ 1,\qquad |\bar{y}|\le\varepsilon e^{-\Gamma}, \tag{A3.17}$$

が導かれる．この方程式（A3.17）は図 A3.1 の一連の直線的な“曲線”を表わす．すなわち，ストレンジアトラクターの構造の第1近似を表わす．大きさの尺度を拡大すると，図 A3.1 の各々の直線は，第1近似の直線群と同じ構造の何本かの直線に分離する．大きさの尺度をさらに拡大しても，これと同じパターンが操り返えされる．それ故，ストレンジアトラクターはカントール集合と同じ構造をもつと言える．

ところで，散逸性が小さい場合のストレンジアトラクターは，ハミルトニアン系のストカスティシティとほんのわずかしか違わない構造である（図A3.4をみよ）．

つぎに，$K\gg1$ であり，Γ が極端に大きくない場合，したがって，ストカスティシティの条件（A3.11）式が成立する場合を出発点にとろう．この点から，Γ を増加させると，

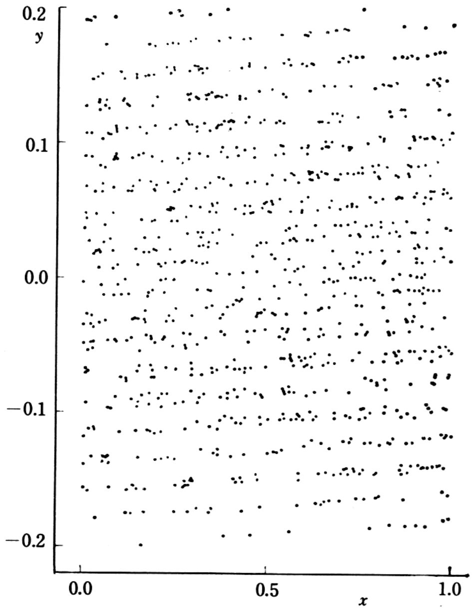


図 A 3.4 散逸が弱い場合のストレンジアトラクター（ε=0. 3, α=0. 3, Γ=0. 85, K=9. 03）

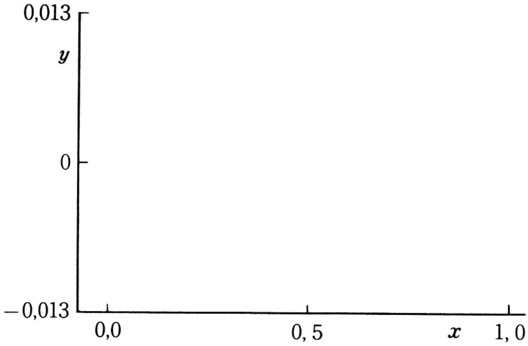


図 A 3.5 ストレンジアトラクターの“死滅”（ε=0. 3, α=0. 3, Γ=5. 85, K=9. 03）

ストレンジアトラクター内の直線の数は方程式（A3. 17）に従って減少する．さらに Γ が増大して，ストカスティシティのしきい値の条件（A3. 15）式または（A3. 16）式が成立するようになるとパラメーター $K\mu$ の一連の分岐が発生する．そして，ストカスティック領域の一部が安定な島（アトラクティングサイクル）にとってかわられる．したがって，ストレンジアトラクターの領域は縮小する．

図A3. 5は，“死滅”寸前のストレンジアトラクターの例を示す．この系の軌道は，小さ

な 3 個の領域（これらは図 A3. 5 で明瞭に示さされている）に分布し，自分自身の近傍に小さな乱雑性の幅をもつ軌道になる.

A 3. 4　ストレンジアトラクター上の分布関数：フラクタルの例

写像（A3. 8）式によって生成される一連の点（x_n, y_n）を（x, y）平面にプロットしてみよう．n 大きくなると，これらの点はストレンジアトラクター上に分布する，そして，$n\to\infty$ の極限では，これらの分布は定常な確率密度 $\rho(x, y)$ で表わされるものになるだろう．位相空間におけるこの分布関数の形を図 A3. 6 に示す．この図のストレンジアトラクターのパラメーターの値は図 A3. 1 の場合と同じにとってある．図 A3. 6 で，分布関数 $\rho(x, y)$ はストレンジアトラクターの 2 つの境界の点（これらは図 A3. 1 の A 点と B 点に対応する）で鋭いピークの極大値をもっている．これらのピークの点を除けば，分布関数は一定の平均値のまわりでふらついている．このゆらぎはフラクタルの典型的な振舞の 1 例である．この分布関数をある領域で平均したものが近似的に定数になる，つまり，

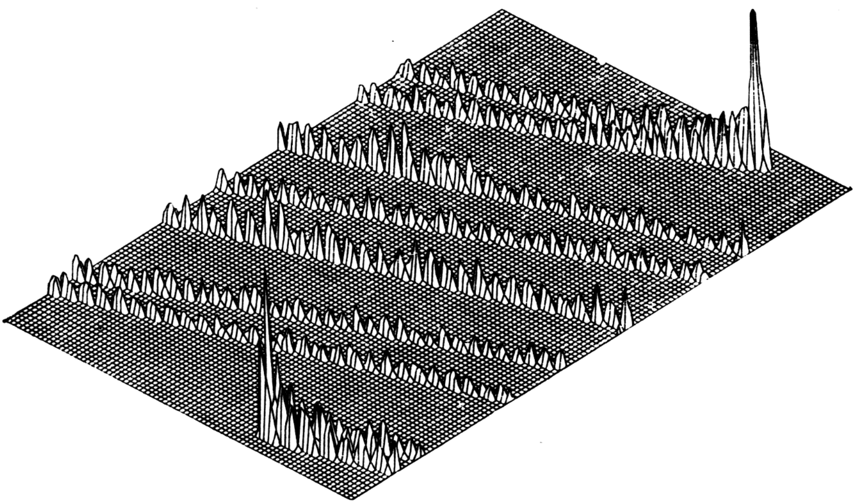


図 A 3. 6　ストレンジアトラクターの定常分布関数

$$\bar{\rho}(x, y)=\text{定数}$$

となることを仮定してもよいであろう．この状況は第 4 章の正弦変換（4. 34）式の時と同じである．いまのストレンジアトラクターを x 軸方向に，アコーディオンのひだをのばすように拡大すると，ストレンジアトラクター上の分布関数は正弦変換の場合に図 4. 4 に示したものと同じになる．この類似性は次のことに注意すれば理解できる．Γ の値が大きいとき，写像方程式（A3. 8）は，

$$\bar{x}=x+\frac{1}{2\pi}\Omega+\frac{1}{2\pi}\frac{K}{\Gamma}\cos 2\pi x,\ \ \text{mod}\ 1, \qquad \text{(A3. 18)}$$

になる．この写像は実質的に（4.3.1）式と同じである（$K/\Gamma \gg 1$ の場合，x を定数 $\Omega/2\pi$ だけずらすとか，cos と sin との違いとかは質的変化をもたらさない）．

大きさの尺度を拡大すると，ストレンジアトラクター内の直線が何本かの直線に分離することに対応して，図 A3.6 のカントール集合の構造をもつ起伏の“尾根”も分離する．アトラクターの境界 B 点の近傍でのこのような分離の例を図A3.7に示す．

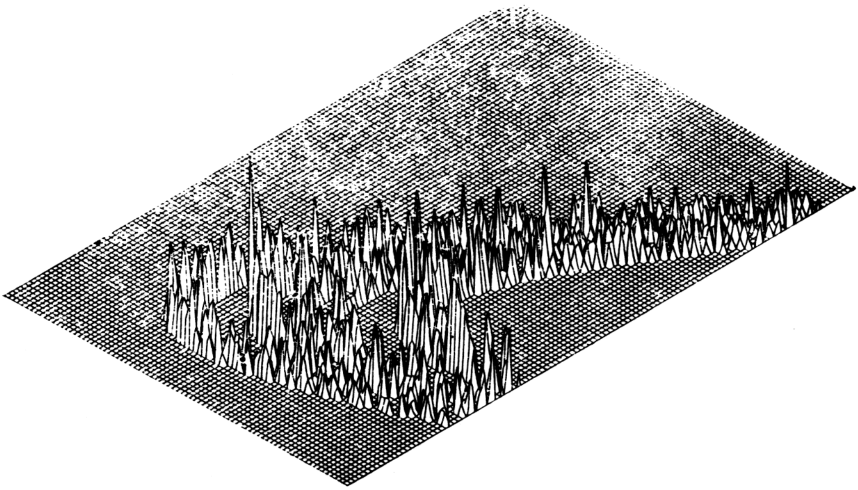


図 A 3.7 ストレンジアトラクターの境界近傍での分布関数の分離

上述のストレンジアトラクター上での現象は，ハミルトニアン系の場合と同様に，位相空間上での混合過程なのである．このことは，位相 θ の相関関数を調べてみればわかる．いまの場合，Γ の値が大きいと位相の写像方程式は y には依存しなくなり，方程式（A3.18）で与えられる．このときの相関関数はすでに取り扱わている．事実，（$\theta=2\pi x$ と置き，x を 1/4 だけずらせば）方程式（A3.18）は（4.15）式と一致する．$K/\Gamma \gg 1$ のとき，この後者の相関関数は（4.17）式で与えられ，指数関数的に減衰する．このときの相関消滅時間 τ_c は，

$$\tau_c=\frac{2T}{\log K/T}, \qquad \text{(A3.19)}$$

であった．

A3.5 ストレンジアトラクターの次元数

ハウスドルフによって導入された次元数の考え方によれば，“非標準的”な方法で作られた集合の次元数も解析できる．いま，1つの集合がこれよりも次元数の高い空間に埋め込まれているとする．そして，この着目している集合体を，何個かの1辺が l の S 次元の立方体で覆いつくそうとするとき，それに必要な立方体の最小の数が $n(l)$ であるとしよ

う．このとき，この集合の（ハウスドルフ）次元数は，

$$d=\lim_{l\to 0}\frac{\log n(l)}{\log(1/l)} \tag{A3.20}$$

で定義される．この次元数 d は，一般に，$d\leq S$ であり，また，整数になるとは限らない．

写像（A3.8）式によって生成される点の集合の次元数をみてみる．まず，（A3.8）式から次のヤコビアン行列を計算しよう，

$$I(x_n, y_n)=\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\bar{x}_{r+1}}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial\bar{y}_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\bar{y}_{n+1}}{\partial y_n} \end{Vmatrix}. \tag{A3.21}$$

また，次の方程式によって規定されるリアプノフ指数 λ_n を導入する，

$$|I(x_n, y_n)-\lambda_n|=0. \tag{A3.22}$$

いまの場合，この式は λ_n の 2 次方程式になる．2 次方程式の根と係数の関係から，$K\mu$ が大きいとき，次の 2 つの関係式が成立する，

$$\lambda_n^+\lambda_n^-=|I(x_n,\ y_n)|e^{-\Gamma}, \tag{A3.23}$$

$$\lambda_n^+\approx K\mu,\quad \lambda_n^-\approx\frac{e^{-\Gamma}}{K\mu}. \tag{A3.24}$$

ただし，λ_n^+ と λ_n^- は方程式（A3.22）の 2 つの根であり，いまの場合，n に依存しない．関係式（3.24）は，不等式 $\sin 2\pi x<1/K\mu$ を満たす安定な島を除く全ての領域で成立する．これらの関係式から，λ_n^+ はある方向のひき伸ばしパラメーターであり，λ_n^- は他の方向のひき伸ばしパラメーターであることがわかる．$\lambda_n^\pm$ が（n に依存しない）定数 $\Lambda^\pm$ であると，ハウスドルフ次元数 d は，

$$d=1+\frac{\log\Lambda^+}{\log(1/\Lambda_-)}. \tag{A3.25}$$

で与えられることが [203, 204]，次の簡単な考察によって理解できる．ヤコビアンが（A3.23）式で与えられる写像を m 回だけ（いまの場合，2 次元の）位相空間の面積要素にほどこすと，その面積は，

$$\Delta S=\text{定数}\ (\Lambda_-\Lambda_+)^m.$$

となる．この面積を，1 辺の長さが

$$l=\text{定数}\ (\Lambda_-)^m.$$

の正方形で覆いつくすには，

$$n(\Lambda_-^m)=\text{定数}\left(\frac{1}{\Lambda_-}\right)^m(\Lambda^+)^m$$

個の正方形が心要である．これらの関係式を定義式（A3.20）に代入して，$l\to 0$（いまの場合，$m\to\infty$）の極限をとると，（A3.25）式が得られる．

ところで，$K\mu$ が大きくないときの写像（A3.8）の $\lambda_n^{\pm}$ は，写像の回数 n に依存するので，上述の議論はそのままでは成り立たない．このような場合，カプラン（J.L. Kaplan）とヨーク（J.A. Yorke）の研究により［203］，（A3.25）の $\Lambda^{\pm}$ は次の値で置き換えればよいことが示唆された，

$$\Lambda^{\pm}=\lim_{m\to\infty}|\lambda_1^{\pm}\lambda_2^{\pm}\cdots\lambda_m^{\pm}|^{1/m}. \qquad \text{(A3.26)}$$

この（A3.26）式が非常に良い精度で成り立つことは，数値計算によって確認されている［204］．また，この関係式は次のように解釈することができる．この関係式の右辺は $\lambda_1^{\pm}$, $\lambda_2^{\pm}$, …, $\lambda_n^{\pm}$ の幾何平均である．幾何平均は，一般に，他の平均操作よりも速く平均値に収束する．点列の次元数を規定する数（$\Lambda^{\pm}$）が収束速度の速い平均操作で与えられることは，点の運動に速やな混合性が生じていることを意味する．したがって，（A3.26）の右辺はある定まった値，すなわち，写像の回数に依存しない一定値に収束すると考えられる．

さらに，計算を続けよう［205］．まず，（A3.26）式を次のように書こう，

$$\Lambda^{\pm}=\lim_{m\to\infty}\exp\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\log|\lambda_k^{\pm}|\right)$$
$$=\exp\langle\log|\lambda^{\pm}|\rangle. \qquad \text{(A3.27)}$$

ここで，$\langle\cdots\rangle$ は，

$$\langle f(\lambda)\rangle=\int f(\lambda(x,\ y))\,\rho(x,\ y)dx\,dy,$$

を意味する，ただし，$\rho(x,\ y)$ はストレンジアトラクター上の定常的な分布関数である．（A3.27）式を（A3.25）式に代入すると，

$$d=1+\frac{\langle\log\lambda^{+}\rangle}{\langle\log\lambda^{-}\rangle}=1+\frac{\langle\log\lambda^{+}\rangle}{\Gamma+\langle\log\lambda^{+}\rangle},$$
$$=1+\frac{h}{\Gamma+h}=2-\frac{\Gamma}{\Gamma+h}. \qquad \text{(A3.28)}$$

が得られる．ここで，h は，

$$h=\langle\log\lambda^{+}\rangle,$$

で定義されるエントロピーである．とくに，Γ が小さいとき〔（A3.9）式により $\mu\fallingdotseq 1$ である〕，ストレンジ　アトラクターの次元数は近似的に2になる，すなわち，

$$d\approx 2-\frac{\Gamma}{h}\approx 2-\frac{\Gamma}{\log K}=2-\frac{\Gamma}{h_0}$$

となる．ただし，$h_0=\log K$ は，$\Gamma=0$ と置いた写像（A3.10）のコルモゴロフエントロピーである．

A3.6　乱流発生の問題とモデルの関係

乱流発生の理想化された問題は（A3.6）式の方程式系で記述できる．この理想化に導く経過の定性的な議論を以下でおこなう［201］．

まず，流体力学的な運動方程式と境界条件を満たす1つの状態を考えて，その状態を $a(r,t)$ というベクトルで表示することにしよう．$a(r,t)$ を，

$$a(r,t)=\sum_k a_k(t)e^{ikr}$$

のようにフーリエ展開で表わすと，一般に運動方程式は次式で表わされる，

$$\dot{a}_k=\gamma_k a_k+i\omega_k a_k+\sum_{k_1} V_{kk_1}a_{k_1}a_{k-k_1}.$$

ここで，散逸係数 γ_k，振動数 ω_k，相互作用の行列要素 V_{kk_1} などは元の運動方程式から直接計算される量である．

いま，複素数の振幅 A の不安定な1つのモードが励起されているとしよう．励起の時刻からしばらくの間は，A の運動は，

$$\dot{A}=\bar{\gamma}A+i\omega A, \tag{A3.29}$$

の形の方程式で記述される．ここで，$\bar{\gamma}>0$ である．また，簡単化のため，波数を表わす A の添字は省略した．この（A3.29）式が表わす運動は非周期運動である．この非周期運動は次第に周期的な運動に移っていく．この遷移過程はランダウによって次のように定性的に説明されている [206]．時間が経過すると，振幅 $|A|$ が増大するので，（A3.29）式では無視されていた $|\mathrm{A}|$ の高次の項を取り入れることが必要になる．このとき，A の運動を記述する方程式は，

$$\dot{A}=(\bar{\gamma}+i\omega)A-\delta|A|^2A, \tag{A3.30}$$

の形になる，あるいは，$|A|^2$ の方程式として，

$$\frac{d}{dt}|A|^2=2\bar{\gamma}|A|^2-2\mathrm{Re}\,\delta|A|^4, \tag{A3.31}$$

となる．方程式（A3.30）または（A3.31）には定常解が存在する．$\mathrm{Re}\,\delta>0$ の場合，この定常状態は，$|A_0|^2$ が次の値，

$$I_0\equiv|A_0|^2=\bar{\gamma}/\mathrm{Re}\,\delta$$

をとるときに対応する．方程式（A3.31）をこの値のまわりで展開すると，$I\equiv|A|^2$ に対する次の方程式が得られる，

$$\dot{I}=-2\mathrm{Re}\,\delta\, I_0(I-I_0),\quad I\equiv|A|^2. \tag{A3.32}$$

今後は，この式の I を作用変数とみなす．方程式（A3.32）を補完する方程式として位相の方程式を，

$$\dot{\theta}=\omega(I) \tag{A3.33}$$

とおこう．ここで $\omega(I)$ ははじめに不安定モードとして着目した波動の振動数であり，この振動数の（I のべき展開としての）I 依存性の中に非線型性による補正が考慮されている．A を，

$$A=|A|e^{i\theta}, \tag{A3.34}$$

とおくと，I と θ に対する具体的な方程式を（A3.30）式から導くことができる．

方程式（A3.32）は，I_0 に対応する安定なリミットサイクルの近傍の運動を記述している．そこでは，γ の値が一般に

$$\bar{\gamma} \sim (Y - Y_c)^{1/2}$$

の形で与えられる，ただし，Y_c は系の特性を表わす定数である．

方程式（A3.31）は，着目したモード A の運動を平担化する操作によって導かれたもので，まだ振動項を含んでいない．そこで，次にモード A の時間発展に対する他のモードの影響を適当な方法で取り入れることにしよう．（A3.30）式が a_k に対する元の方程式の近似式であることを考慮して，a_k の元の方程式に戻れば，A の方程式は，

$$\dot{A} = (\bar{\gamma} + i\omega)A - \delta|A|^2 A + \sum_{k \fallingdotseq k_0} V_{kk0}\, a_k\, a_{k0-k}, \qquad \text{(A3.35)}$$

と書ける．ここで，モード A に対応する波数が k_0 であるとする．（A3.35）式に A^* を乗じて，I の方程式を作ると，

$$\dot{I} = -2\mathrm{Re}\,\delta\, I_0(I - I_0) + 2\mathrm{Re}(A^* \sum_{k_0 \fallingdotseq k} V_{kk0}\, a_k\, a_{k0-k}) \qquad \text{(A3.36)}$$

が得られる．

ここで，$Y - Y_c$ という量が小さいこと，そして，（A3.36）式の総和記号の中のモード a_k の不安定性が成長しない，あるいは，成長したとしてもその成長率が十分に小さいことを仮定しよう．この仮定から，a_k に対しては近似的に，

$$a_k = |a_k| e^{i\omega_k t}, \quad a_{-k} = a_k^*$$

と置くことが可能となり，また，総和の部分に対しては，

$$\sum_k V_{kk0} a_k a_{k0-k} \approx \sum_{k > k_0} V_{kk0} |a_k|\,|a_{k0-k}| \exp[i(\omega_k - \omega_{k0-k})t]$$
$$+ \sum_{k < k_0} V_{kk0} |a_k|\,|a_{k0-k}| \exp[i(\omega_k + \omega_{k0-k})t], \qquad \text{(A3.37)}$$

と書くことができる．この表式（A3.37）を表式，

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \frac{2\pi int}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \qquad \text{(A3.38)}$$

と比較してみる．まず，（A3.37）式の右辺において，条件 $k < k_0$ のついた総和記号の中の各項は時間的に激しく振動するので無視しても差し支えない．そして，V_{kk0}, $|a_k|$ および $|a_{k0-k}|$ の k 依存性は弱いと考えてよい．さらに，条件 $k > k_0$ のついた総和の部分では，非常に弱い分散 $d\omega_k/dk$ をもつモードが十分な数だけ励起されていると仮定する．このときの表式（A3.37）と表式（A3.38）を比較することにより，近似的に，

$$\sum_{k > k_0} V_{kk0}\, a_k\, a_{k0-k} \approx \text{定数} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \qquad \text{(A3.39)}$$

という関係式が得られる．ただし，T は，

$$\frac{2\pi}{T} \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k,$$

を意味する（Δk は，励起モード a_k の隣り同志の波数間隔の代表値である）．（A3.37）式

と（A3.39）式を（A3.36）式に代入し，時間的に激しく振動する部分（$k<k_0$ のついた総和の部分）を無視して得られる方程式と（A3.34）式からなる方程式系は，前述のモデルに対する方程式系（A3.6）と同じ形になる．

付録4　輻射の非線型力学

4.1　光の軌跡の方程式

大洋および大気中の音波と電離層中の電波はかなり遠くまで伝播する．この現象は媒質中の波の位相速度がある座標（例えば，大洋の深さ）に対して単調でない依存性を持つために，天然の導波管が生じ，その中を波が伝播することに起因する．しばしば，媒質の実際のパラメータについては幾何光学の近似を使うことができる．そこで，天然の媒質中の波の伝播についての問題は輻射の力学の問題に帰着される．事実，この方法で多くの新しい結果が得られ，特に，輻射のストカスティックな不安定性が生じる条件を決定する事もできる [208].

光の軌跡を決定するためにハミルトンの形式を使う事にする．z 軸を導波管の軸にとり，座標 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ は z 軸にたいして垂直な平面に属するものとする．そうすると，光の座標 (x,y,z) はハミルトンの方程式

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}},\quad \dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},$$

$$H=-[n^2(\boldsymbol{r},z)-\boldsymbol{p}^2]^{1/2}, \tag{A.4.1}$$

を満足する．ここで点（・）は z についての微分を表し，$\boldsymbol{p}$ は運動量で

$$\boldsymbol{p}=n\dot{\boldsymbol{r}}/(1+\dot{\boldsymbol{r}}^2)^{1/2}, \tag{A.4.2}$$

に等しく，$n=n\ (\boldsymbol{r},z)$ は屈折率である．

n をつぎのように分離して書こう．

$$n^2(\boldsymbol{r},z)=n^2(\boldsymbol{r})+\varepsilon v(\boldsymbol{r},z) \tag{A.4.3}$$

ここで $n\ (\boldsymbol{r})$ は規則的（z について一様）な場合に相当し，摂動 εv は一様でない場合の影響を考慮している．$\varepsilon \ll 1$ は摂動の無次元のパラメータである．ε の値が非常に小さいため，H を

$$H=H_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})+\varepsilon V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},z),$$

$$H_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=-[n^2(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{p}^2]^{1/2},$$

$$V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},z)=v(\boldsymbol{r},z)/2H_0 \tag{A.4.4}$$

と表すことができる．

光の非摂動運動はハミルトニアン H_0 で与えられる．したがって，一様でない場合の光の軌跡に関する問題はハミルトニアンによる有限な運動の粒子に対して非定常な摂動が作用するときの問題と等価になる．このとき，時間の役割を演じるのは変数 z で，z に沿って一様でないことが摂動を生むのである．

最も簡単なのは，n が y に依存しない場合であり，方程式 (A.4.1)，(A.4.4) は次のようになる．

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad p\equiv p_x,$$

$$H=H_0+\varepsilon V(x,p,z),\quad H_0=-[n^2(x)-p^2]^{1/2} \tag{A. 4. 5}$$

まず，光の無摂動運動を考えよう．n_∞ の値は $x\to\infty$のときの漸近的な $n(x)$ を表し，n (x) は一つの最大値をもつ上に凸の単純な形を表わすものとする．このとき H_0 はポテンシャルの井戸の中の単純な運動を規定する．この有限な周期的軌道は天然の導波管の中を伝播する輻射に対応する．方程式（A. 4. 5）と等価な相対論的な粒子の力学について述べることもできる．

E を H_0 $(x,p)=E$ の積分値に相当する粒子のエネルギーを表すものとする．そうすると，（A. 4. 5）からセパラトリックス上では $E=-n_\infty$ となることがわかる．有限な運動は

$$-n(0)<E<-n_\infty \tag{A. 4. 6}$$

の範囲に対応し，無限の運動は，$-n_\infty<E<0$ の範囲に対応する．運動が周期的な場合を考えて，公式（1. 9）による作用−各変数（I,θ）を導入しよう．ただし

$$p=[n^2(x)-E^2]^{1/2}. \tag{A. 4. 7}$$

である．変数（I,θ）を使って運動方程式（A. 4. 5）を次のように書きなおそう．

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\theta,z),$$

$$\dot{I}=-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\theta},\ \dot{\theta}=\omega(I)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial I} \tag{A. 4. 8}$$

摂動のポテンシャルが z に関して周期的である場合を考えて

$$V(I,\theta,z)=\frac{1}{2}\sum_{m,s=-\infty}^{\infty}V_{ms}(I)\exp(im\theta+is\kappa z)+\mathrm{C.C}, \tag{A. 4. 9}$$

とおく．ここで κ は摂動の“振動数”である．（$2\pi/\kappa$ は摂動の空間的周期である）．

方程式（A. 4. 8）と（A. 4. 9）から振動の最大の影響が現われるのは共鳴の場合，すなわち

$$m\omega(I)+s\kappa=0 \tag{A. 4. 10}$$

の場合である．こうして 1. 3 節で詳しく取扱った非線型共鳴の問題に到達した．つぎに一つの共鳴の近傍での光の運動について調べよう．条件（A. 4. 10）を満たす I の値を I_0 とする．（A. 4. 8），および（A. 4. 9）式と 1. 3 節の結果から共鳴の幅は次のようになる，

$$\Delta I=\max|I-I_0|=4\left|\varepsilon V_{ms}\Big/\frac{d\omega(I_0)}{dI}\right|^{1/2}$$

$$\Delta\omega=4\left|\varepsilon V_{ms}\frac{d\omega(I_0)}{dI}\right|^{1/2}\equiv\frac{\Omega}{m} \tag{A. 4. 11}$$

ここで得られた結果には次のような物理的意味がある．摂動のないときの光の軌跡は x 軸に沿って振動数 $\omega(I)$ で振動する．この運動には，共鳴振動数 $\omega(I_0)$ の近傍で，z 方向に光の二次的変調が重なる．変調の振幅は式（A. 4. 11）で与えられる．この式は z 方向

に垂直な面における光の局所領域も決定する．このようにして，作用I_0に対応する無摂動の光の軌跡に沿って，有効範囲 ΔI の二次的導波管が生じる．この導波管にとらえられた輻射はその中で無摂動の軌跡に対して振動数 Ω の振動を行なう．その結果，波動場の群速度の周期的な変調も生じる．

4.2　断面 $n(x)$ における光の軌跡

例として次の典型的な場合を吟味してみよう．

$$n^2(x)=n_\infty^2+\frac{\mu^2}{\mathrm{ch}^2(x/a)}, \tag{A.4.12}$$

ここでμは対応するポテンシャルの井戸の深さを表わし，a はその有効幅を表わす．(A.12) 式を (A.4.5) 式と (1.9) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}&H_0(I)=-[n_\infty^2+\mu^2(1-I/I_s)^2]^{1/2},\quad I_s=a\mu,\\&\omega(I)=(I_s-I)/[a^2|H_0(I)|],\\&\omega(0)\equiv\omega_0=\mu/an(0).\end{aligned} \tag{A.4.13}$$

となる．x と p は位相 $\theta=\omega(I)+\theta_0$ の関数として次のように表わすことができる，

$$\begin{aligned}&p=\beta(1-\beta^2)^{1/2}\sin\theta/(\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta)^{1/2},\\&x=a\cdot\mathrm{arcsh}\left[\frac{1}{\beta}(1-\beta)^{1/2}\cos\theta\right],\end{aligned} \tag{A.4.14}$$

ただし，

$$\beta=[H_0^2(I)-n_\infty^2]^{1/2}/\mu. \tag{A.4.15}$$

である．導波管の境界を定めるセパラトリックスにおいては，$I=I_s$，$H_0(I_s)=-n_\infty$ であることに注目しよう．したがって，パラメータ βは《エネルギー》$=E$ からセパラトリックスまでの距離を定める．もし導波管の軸の z 軸方向の周期的なずれが摂動として存在すれば，この場合は

$$n(x,z)=n(x-f(z)), \tag{A.4.16}$$

となる．ここでずれの関数を $f(z)=f_0\cos\kappa z$，ずれの空間周期を $2\pi/\kappa$ とする．$\varepsilon=f_0/a\ll1$ とみなして，(A.4.16) を ε について級数展開し，はじめの 2 項までとると

$$n^2(x-f(z))\approx n^2(x)-f(z)\frac{dn^2(x)}{dx},$$

となる．したがって (A.4.3) を使えば公 (4.8) 式の摂動は次のような形で表される．

$$\varepsilon V=\frac{\varepsilon}{2H_0}f(z)\frac{dn^2(x)}{dx}=-\dot{p}f(z). \tag{A.4.17}$$

セパラトリックスの近傍におけるストカスティックな層の形成の問題を考察するには上で導かれた結果で十分である．層の形成の原因は摂動 $f(z)$ である．ここでの方法は5.1節と5.2節の方法と同じである．摂動と光の主要な運動との間の共鳴は (A.4.10) 式に従って条件 $(2m+1)\,\omega(I)=\kappa$ のもとでおこる．なぜならば (A.4.14) の運動量 p は奇数次の

調和振動についてのフーリエ級数に分解されるからである．多くの m の場合，共鳴間の幅は

$$\delta\omega=2\omega^2/\kappa. \tag{A. 4. 18}$$

に等しい．$\beta\to 0$ のとき，作用と振動数についての共鳴の幅は次のようになる，

$$\frac{\Delta I}{I_s}=4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\varepsilon\frac{\omega}{\omega_0}\frac{n_\infty}{n(0)}\right)^{1/2},\quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0}=4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\varepsilon\frac{\omega}{\omega_0}\frac{n(0)}{n_\infty}\right)^{1/2} \tag{A. 4. 19}$$

式（A. 4. 18）と（A. 4. 19）を共鳴が重複する条件，$K=(\Delta\omega/\delta\omega)^2>1$ に代入すると

$$K=4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{12}\varepsilon\left(\frac{\kappa}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^3\frac{n_0}{n_\infty}\gtrsim 1. \tag{A. 4. 20}$$

となる．ストカスティックな層の境界にあたる振動数 ω は（A. 4. 20）で $K\sim 1$ とおいて求められ，

$$\bar{\omega}/\omega_0=\left[4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\varepsilon\left(\frac{\kappa}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{n_0}{n_\infty}\right)\right]^{1/3} \tag{A. 4. 21}$$

となる．もし，光の初期の状態が，光の作用 I が（A. 4. 21）の範囲にあるような場合は，z に沿った空間において光の運動が拡散の性格を帯びることになる．光が拡散すると光は無摂動のセパラトリックスの近傍に達し，導波管の範囲からはみ出る．こうして摂動をうけた乱雑な作用は導波管の有効幅を小さくする．ストカスティックな層の範囲には，場の多数の振動モードが入り込む．したがって，ストカスティックな層からの場の放射は導波管における高いモードのフィルタリングの過程を意味する．

参 考 文 献

[1] Zubarev, D.N., *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics* (Plenum. New York, 1974). ズバーレフ 「非平衡統計熱力学」 久保亮五監訳 丸善

2. Gurov, K.P.., *Fundamentals of Kinetic Theory* (Nauka, Moscow, 1966), in Russian.

3. Akhiezer, A.I. and S.V. Peletminsky, *Methods of Statistical Physics* (Pergamon, Oxford, 1980).

4. Fujita, S., *Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics* (Saunders, Philadelphia, 1966).

5. Liboff, R.L., *Introduction to the Theory of Kinetic Equations* (Wiley, New York, 1969).

6. Klimontovich, Yu. L., *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas* (Pergamon, New York, 1982).

7. Prigogine, I., *Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 19 62).

8. Kac, M., *Statistical Independence in Probability, Analysis, and Number Theory* (Mathematical Assoc. of America, Oberlin, Ohio, 1959).

9. Kac M., *Probability and Related Topics in Physical Sciences* Proc. of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1957. (Interscience, New York, 1958).

10. Kac, M., *Some Probability Problems in Physics and Mathematics*. Course of Lectures. Dallas, 1956 (Unpublished).

11. Uhlenbeck, G.E., and G.W. Ford, *Lectures in Statistical Mechanics*. Proc. of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1960 (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1963), Vol. I.

12. Balescu, R., *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1975).

13. Zaslavsky G.M , *Statistical Irreversibility in Nonlinear Systems* (Nauka, Moscow, 1970), in Russian.

14. Zaslavsky, G.M. and B.V. Chirikov, Sov. Phys. Usp. **14**, 549 (1972).

15. Chirikov, B.V., *Studies in the Theory of Nonlinear Resonance and Stochasticity*. Novosibirsk, INP no. 267, 1969 (unpublished).

16. Zaslavsky, G.M., Sov. Phys. Uspekhi **16**, 761 (1974).

17. Zaslavsky, G.M., Sov. Phys. Uspekhi **22**, 211 (1979).

18. Zaslavsky, G.M., Phys. Reports 80, 157 (1981).

[19] Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, New

York, 1978).
アーノルド「古典力学の数学的方法」安藤韶一，蟹江幸博，丹羽敏雄訳　岩波書店

[20] Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations* (MIT, Cambridge, Mass., 1978). アーノルド「常微分方程式」足立正久，今西英器訳　現代数学社

21. Moser, J.K., *Lectures on Hamiltonian Systems.* Memoirs of the American Mathematical Society, **81,** 1–60, N.Y. (1968).

22. Landau, L.D. and E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1976).
ランダウ・リフシッツ　物理学教程「力学」広重徹，水戸巌訳東京図書　1974

23. Akhiezer, A.I. and G. Ya. Lyubarsky. DAN SSSR, **80,** 193 (1951).

24. Berman, G.P. and G.M. Zaslavsky, Izv, VUZ., Radiofizika, **15,** 1546 (1972).

[25] Einstein, A., Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. **19,** 82 (1917). アインシュタイン選集　湯川秀樹監修　共立出版社

26. Arnold, V.I., DAN SSSR 156, 9 (1964).

27. Whiteman, K.J., Rep. Progr. Phys. **40,** 1033 (1977).

28. Halmos P.R., *Lectures on Ergodic Theory* (Chelsea, New York, 1958).

[29] Arnold, V.I., and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, New York, 1968). アーノルド・アベズ「古典力学のエルゴード問題」吉田耕作訳　吉岡書店

30. Kornfeld, I.P., Ya.G. Sinai and S.V. Fomin, *Ergodic Theory* (Springer, New York, 1982).

[31] Billingsley, P. *Ergodic Theory and Information* (Wiley, New York, 1965). ビングスレイ「確率論とエントロピー　―エルゴード理論と情報量―」渡辺毅，十時東生訳　吉岡書店

32. Hopf, E., Math, Ann. **117,** 590 (1940).

33. Krylov, N.S., *Works on the Foundations of Statistical Physics* (Princeton University, Princeton, New Jersey, 1979).

34. Ehrenfest, P., Phys, Z. **15,** 657 (1914).

35. Kolmogorov, A.N., DAN SSSR **119,** 861 (1658).

36. Kolmogorov, A.N., DAN SSSR **124,** 754 (159).

37. Tikhomirov, V.M., Uspekhi Mat. Nauk **18,** 55 (1963).

38. Sinai, Ya.G., DAN SSSR **124,** 768 (1959); and *ibid.*, **125,** 1200 (1959).

39. Sinai, Ya.G., Russ, Math, Surveys **25,** 132 (1970).

40. Anosov, D.V., *Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature.* Proceedings of the Steklov Inst. of Mathematics (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1969).

41. Anosov, D.V., and Sinai, Ya.G. Russian Math. Surveys, **22** (5), 103 (1967).

42. Rokhlin, B.A., Russian Math, Surveys **22**, 3 (1967).
43. Gurevich, B.M. and Ya.G. Sinai, *Algebratic Automorphisms of Torus and Markov Chains*. Appendix to the Russian edition of P. Billingsley,[39] 205 (Mir, Moscow, 1969), in Russian.
44. Anosov, D.V., Introductory article to Collected papers "Smooth Dynamic Systems" (Mir, Moscow, 1977), in Russian.
45. Ornsteien, D.S., *Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems* (Yale University, New Haven. Conn., 1974).
46. Sinai, Ya. G., DAN SSSR **147**, 797 (1962).
47. Sinai, Ya. G., Matem. Sbornik **63**, 23 (1963).
48. Chirikov, B.V., Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
[49] Poincaré, H., *Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste* (Paris, 1892; Dover, New York, 1957). ポアンカレ 「常微分方程式」 福島満洲雄, 浦太郎訳 共立出版
50. Kolmogorov, A.N., DAN SSSR **98**527 (1954).
51. Arnold, V.I., Izv. AN SSSR, Ser. Mat. **25**, 21 (1961).
52. Arnold, V.I., Russ. Math. Surveys **18**(5), 9 (1963).
53. Arnold, V.I., Russ. Math. Surveys **18**(6), 85 (1963).
54. Moser, J.K., Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. **K1** (11a), 1 (1962).
55. Volkovyssky, K.L. and Ya. G. Sinai. Funkts. Analizi Prilozh. **5**, 19 (1971).
56. Lifshitz, E.M., I.M. Lifshitz and I.M. Khalatnikov, ZhETF **59**, 322 (1970).
57. Holladay, J.C., Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 887 (1957).
58. Rokhlin, V.A., Izv. AN SSSR, Ser. Math. **25, 499** (1961).
59. Renyi, A., Acta Math. Acad. Sei. Hungary **8**, 477 (1957).
60. Zaslavsky, G.M. and B.V. Chirikov. DAN SSSR **159**, 306 (1964).
61. Sinai, Ya. G., DAN SSSR **153**, 1261 (1963).
62. Sinai, Ya. G., Russ. Math. Serveys **25** (2), 137 (1970).
63. Anosov, D.V., Soviet Mathematics Dokl. **4**, 1153 (1963).
64. Hopf, E., *Ergodentheorie* (Springer, Berlin, 1937).
65. Fermi, E., Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
66. Ulam, S., Proc. 4th Berkeley Sympostum on Mathematics and Probability, **3**, 315 (Berkeley-Los Angeles, 1961).
67. Sinai, Ya. G., *Introduction to Ergodic Theory* (Princeton University, Princeton, N.J., 1977).
68. Liberman, M.A. and A.J. Lichtenberg, Phys. Rev. **5**, 1852 (1972).
69. Poraevsky V.H. and Sagdeev R.E. ZhTE **32**, 1291 (1962).
70. Zaslavsky, G.M. and N.N. Filonenko, Sov. Phys. JETP **38**, 317 (1974).

71. Brahic, A., Astron. Astrophys. **12**, 98 (1971).

72. Jaeger, F., A.J. Lichtenberg and M.A. Liberman, Plasma Physics **14**, 1073 (1972).

73. Liberman, M.A. and A.J. Lichtenberg, Plasma Phys. **15**, 125 (1973).

74. Volosov, V.I. and A.V. Komin, ZhTF**38**, 864 (1968).

75. Bocharov, V.N., *et al.*, Proc. Conf. on Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion Res. (Vienna, 1969), Vol. 1, p. 561.

76. Izrailev, F.M. and B.V. Chirikov, (INP, Novosibirsk, 1968, unpublished).

77. Chirikov, B.V. and F.M. Izrailev, Colloques internat. du C.N.R.S., **229**, 409 (Toulouse, 1973).

78. Zaslavsky, G.M., Zhurn. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz. **2**, 16(1967).

79. Scott, A., *Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics* (Wiley, New York, 1970).

80. Krylov, N.M. and N.N. Bogolyubov, *Introduction to Nonlinear Mechanics* (Princeton Univ., Princeton, 1947).

[81] Bogolyubov, N.N. and Yu. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory* of Nonlinear Oscillations (Gordon and Breach, New York, 1961). ボゴリューボフ, ミトロポリスキー「非線型振動論」益子正教訳 共立出版

82. Chirikov, B.V., *Atomnaya Energiya* **6**, 630(1959).

83. Zaslavsky, G.M. and V.N. Synakh, Radio Phys. Qu Electron. **13**, 471(1973).

84. Bunimovich, L.A., Matem. Zametki **8**, 205(1970).

85. Walker, G.H. and J. Ford, Phys. Rev. **188**, 416(1969).

[86] Migdal, A.B., *Qualitative Methods in Quantum Theory* (Benjamin, New York, 1977). ミグダル, クライノフ「量子力学の近似的方法」岩崎与世雄訳 総合図書

87. Zaslavsky, G.M. and N.N. Filonenko, ZhETF **54**, 1590(1968).

88. Filonenko, N.N., R.Z. Sagdeev and G.M. Zaslavsky, Nuclear Fusion **7**, 253 (1967).

89. Hénon, M. and C. Heiles, Astron. J. **69**, 73(1964).

90. Vedenov, A.A., E.P. Velikhov and R.Z. Sagdeev, Nuclear Fusion **1**, 82(1961).

91. Arnold, V.I., *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer, Berlin, 1983).

92. Mel'nikov, V.K., DAN SSR **148**, 1257(1963).

93. Morozov, A.I. and L.S. Solovyev, "Geometry of Manetic Field," in *Problems in Plasma Theory* (Atomizdat, Moscow, 1963), Vol. 2.

94. Rosenbluth, M.N., R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor and G.M. Zaslavsky, Nuclear Fusion **6**, 297(1966).

95. Casati, G. and J. Ford, Phys. Rev. A. **12**, 1702 (1975).

96. Smale, S., Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 747(1967).

97. Nitecki, Z., *Differential Dynamics* (MIT, Cambridge, Mass. 1971).

98. Neimark, Yu. I., *Method of Point Mappings in the Theory of Nonlinear Oscillations* (Nauka, Moscow, 1972), in Russian.

99. Alekseev, V.M., Matem. Sbornik **76**, 72(1967); *ibid.*, **77**, 545(1968); and *ibid.*, **78**, 3(1969).

100. Alekseev, V.M., *Quasistochastic Oscillations and Qualitative Methods of Celestial Mechanics*. 9th Summer School (Naukova Dumka, Kiev, 1972), p. 212, in Russian.

101. Bogolyubov, N.N. and N.M. Krylov, "On Fokker-Planck equations obtained in perturbation theory by a method based on spectral properties of perturbation Hamiltonian," in *Collected Works* (Naukova Dumka, Kiev, 1970), Vol. 2, p. 5, in Russian.

102. Bogolyubov, N.N., "Elementary example of attainment of statistical equilibrium in a system linked to a thermostat. On some statistical methods in mathematical physics," in *Collected Works* (Naukova Dumka, Kiev, 1970), Vol. 2, p. 77, in Rusian.

103. Bogolyubov, N.N., "Problems of the Dynamical Theory," in *Statistical Physics*. Studies Stat. Mech. **1**, 5(1961).

104. Bogolyubov. N.N. *Collected Works* (Naukova Dumka, Kiev, 1970), Vol. 2, in Russian.

105. Zaslavsky, G.M. and R.Z. Sagdeev, Sov. Phys. JETP **25**, 718(1967).

106. Zwanzig, R.J., Chem. Phys. **61**, 1(1970).

107. Zubarev, D.N. and V.P. Kalashnikov, Theor. Math. Phys. **3**, 395(1970).

108. Zubarev, D.N. and A.M. Khazanov, Theor. Math. Phys. **34**, 43(1978).

109. Artsimovich, L.A. and R.Z. Sagdeev, *Plasma Physics for Physicists* (Spirnger, Berlin, 1983).

110. Sagdeev, R.Z. and A.A. Galeev, *Nonlinear Plasma Theory* (Benjamin, New York, 1969).

111. Kadomtsev, V.V., *Plasma Turbulence* (Academic, New York, 1965).

112. Fermi E., J. Pasta and S. Ulam, "Studies of Nonlinear Problems." Los Alamos Scientific Report LA-1940(1955).

113. Ford, J., Journ. Math. Phys. **2**, 387(1961).

114. Ford, J. and J. Waters. Journ. Math. Phys. **4**, 1293(1963).

115. Jackson, E.A., Journ. Math. Phys. **4**, 581, 686(1963).

116. Izrailev, F.M. and B.V. Chirikov, DAN SSSR **116**, 57(1966).

117. Izrailev, F.M., A.I. Khisamutdinov and B.V. Chirikov, Rept. INF 252, No-

vosibirsk (1968).

118. Hirooka, H. and N. Saito, J. Phys. Soc. Japan **26,** 624(1969).

119. *Solitons in Action.* Edited by K. Lonngren and A. Scott (Academic Press, New York, 1978).

120. Fermi, E., *Collected Papers (Note et Memorie)* (University of Chicago, Academia Nationale dei Lincei, Roma, 1965), Vol. 2, p. 977.

[121] Lifshitz, E.M. and L.P. Pitaevsky, *Physical Kinetics* (Pergamon, New York, 1981). リフシッツ, ピタエフスキー 「物理的運動学」 井上健雄, 石橋善弘, 柳下崇訳 東京図書

122. Derbenev, Ya. S., Kheifets S.A. TMF **31,** 220(1977).

123. Sagdeev, R.Z., "Collective Processes and Shock Wavesin Plasma." *Reviews of Plasma Physics,* Vol. 4(Plenum, New York, 1966).

124. Gardner, C.S., J.M. Green, M.D. Kruskal and R.M. Miura, Phys. Rev. Lett. **19,** 1095(1967).

125. Zakharov, V.E., S.V. Manakov, S.P. Novikov and L.P. Pitayevsky, *Introduction to the Thory of Solitons* (Plenum, New York, 1983).

126. Karpman, V.I., *Nonlinear Waves in Dispersive Media* (Pergamon, Oxford, 1975).

127. Whitham, B.B., *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).

128. Zaslavsky, G.M. and N.N. Filonko, ZhETE **56,** 106(1969).

129. Zaslavsky, G.M. and N.N. Filonenko, ZhETF **57,** 1240(1969).

130. Berman, G.P. and G.M. Zaslavsky, ZhETF **58,** 1453(1970).

131. Berman, G.P. and G.M. Zaslavsky, Physica A **91,** 450(1978).

132. Berman, G.P. and G.M. Zaslaysky, Sov. Phys. Dokl. **23,** 410(1978).

133. Glauber, R.J., Phys. Rev. Lett. **10,** 84(1963).

134. Agrawal, G.S. and E. Walf, Phys. Rev. D.**2,** 2161, 2187, 2206(1970).

135. Malkin, I.A. and V.I. Man'ko, *Dynamic Symmetries and Coherent States of Quantum Systems* (Nauka, Moscow, 1979), in Russian.

136. Malkin, I.A. and V.I. Man'ko, Sov. Phys. JETP **32,** 959(1971).

137. Pauli, W., *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, in Handbuch der Physik,* Bd **24,** T. 1, 2 (Aufl. Berlin, 1933).

138. Luisell, W.H., *Radiation and Noise in Quantum Electronics* (McGraw-Hill, New York, 1964).

139. Berman, G.P., A.M. Iomin and G.M. Zaslavsky, Physica **4D,** 113(1981).

140. Pukhov, N.M. and D.S. Chernavsky, TMF **7,** 219(1971).

141. Feinberg, E.L., Sov. Phys. Uspekhi **14,** 455(1972).

142. Gutzwiller, M.C., J. Math. Phys. **14,** 139(1973).

143. Percival, I.C., Adv. Chem. Phys. 36, 1(1977).
144. Berman, G.P. and G.M. Zaslavsky, Physica **A97,** 367(1979).
145. Zaslavsky, G.M., Sov. Phys. JETP **46,** 1094(1977).
146. Casati, G., B.V. Chirikov, F.M. Izrailev and J. Ford, *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin, 1979), Vol. 93, p. 334.
147. Chirikov, B.V., F.M. Izrailev and D.L. Shepelyansky, Soviet Scientific Reviews C **2,** 181(1981).
148. Berman G.P. and G.M. Zaslavsky, Physica **111A,** 17(1982).
149. Berman, G.P., G.M. Zaslavsky and A.R. Kolovsky, ZhETF **81,** 506(1981).
150. Berman, G.P.,A.R. Kolovsky and G.M. Zaslavsky, Phys. Lett. **87A,** 152(1982).
151. Berman, G.P. and A.M. Iomin, Preprint (IPSB, Krasnoyarsk, 1981).
152. Uehling, E.A. and G.E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **43,** 552(1933).
153. Uehling, E.A., Phys. Rev. **46,** 917(1934).
154. Pauli, W., *Festschrift zum 60. A Sommerfelds* (Leipzig, 1980), p. 30.
155. Maslov, V.P. and M.V. Fedoryuk, *Quasiclassical Approximation for Equations of Quantum Mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1980).
156. Landau, L.D. and Ya. A. Smorodinsky, *Lectures on Nuclear Physics* (Plenum, New York, 1959).
157. Gutzwiller, M.C., J. Math. Phys. **11,** 1791(1970).
158. Wigner, E.P., Math. Ann. **53,** 36(1951); *ibid.*, **62,** 548(1955); *ibid.*, **65,** 203 (1957); *ibid.*, 325(1958).
159. Dyson, F.J., J. Math. Phys. **3,** 140, 157, 166(1962).
160. Sinai, Ya. G., Izv. AN SSSR, Ser. Mat. **30,** 1275(1966).
161. Margulis, G.A., Funkts. Anal. i Prilozh. **3,** 80(1969); *ibid.*, **4,** 62(1970).
162. Bowen, R., Amer. J. Math. **94,** 1, 413(1972).
163. Bowen, R., Amer J. Math. **94,** 413(1972).
164. Prokhorov, Yu. V. and Yu. A. *Rozanov, Probability Theory* (Springer, New York, 1969).
165. Rice, S.O., Bell Syst. Tech. J. **24,** 46(1945).
166. Cramér, H. and M.R. *Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes* (Wiley, New York, 1967).
167. MacDonald, S.W. and A.N. Kaufman, Phys. Rev. Lett. **42,** 1189(1979).
168. Casati, G., F. Valz-Gris and I. Guarnieri, Lett. Nuovo Cimento **28,** 279(1980).
169. Courant, R. and D. Hilbert, *Methoden den Mathematischen Physik* (Springer, Berlin, 1968; English edition: Interscience, New York, 1957).
170. Kostyuchenko, A.G. and I.S. Sargasyan, *Distribution of Eigenvalues* (Nauka, Moscow, 1979), in Russian.

171. Arnold, V.I., Function. Anal. Appl. **6**, 94(1972).

172. Belobrov, P.I., G.M. Zaslavsky and G. Kh. Tartakovsky, ZhETF **71**, 1799 (1976).

173. Stenholm, S., Phys. Reports **60**, 1(1973).

174. Slater, N.B., *Theory of Unimolecular Reactions* (Cornell University. Ithacz, 1959).

175. Robinson, P.J. and K. A. Holbrook, *Unimolecular Reactions* (Wiley, New York. 1972).

176. Keller, J.B., Ann. Phys. **8**, 180(1958).

177. Balian, R. and C. Bloch. Ann. Phys. **69**, 76, 85(1972).

178. Berry, M.V. and K.E. Mount, Rep. Progr. Phys. **35**, 315(1972).

179. Berry, M.V. and M. Tabor, Proc. Roy. Soc. **349A**, 101(1976).

180. Berry, M.V. and M. Tabor, J. Phys. **10A**, 371(1977).

181. *Statistical Theory of Spectra: Fluctuations*, edited by C.E. Porter (Academic, New York, 1965).

182. Porter, C.E., *Statistical Theory of Spectra: Fluctuations*, edited by C.E. Porter (Academic, New York, 1965), p. 3.

183. Porter, C.E. and N. Rosenzweig, Phys. Rev. **120**, 1698(1960).

184. Pastur, L.A., Uspekhi Mat. Nauk **28**, 3(1973).

185. Brody, T.A., *et al.*, Rev. Mod. Phys. **53**, 385(1981).

186. Weil, H., *Classical Groups* (Princeton University, Princeton, N.J., 1946).

187. Gurevich, I.I. and M.I. Pevsner, Nucl. Phys. **2**, 575(1956/1957).

188. Bunimovich, L. A., Math. of the USSR-Sbornik **23**, 45(1974).

189. Bunimovich, L.A., Commun. Math. Phys. **65**, 295(1979).

190. Bunimovich, L.A., Function. Anal. Appl. **8**, 254(1975).

191. Bennetin, G. and J.M. Strelcyn, Phys. **17**, 773(1978).

192. Nekhoroshev, N.N., Uspekhi Mat. Nauk **32**, 6(1977).

193. Lichtenberg, A.J. and Liberman, M.A., Regular and Stochastic Motion. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

194. Monin, A.S. and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*. Parts 1, 2 (MIT, Cambridge, Mass., 1975).

195. Lorenz, E., J. Atmos. Sci. **20**, 130(1963).

196. Monin, A.S., Uspekhi Fiz. Nauk **125**, 97(1978).

197. Rabinovich, M.I., Uspekhi Fiz. Nauk **125**, 123(1978).

198. Afraimovich. V.S., V.V. Bykov and L.P. Shil'nikov, DAN SSSR **234**, 336 (1977).

199. Ruelle, D. and F. Takens. Comm. Math. Phys. **20**, 167(1971).

200. Zaslavsky, G.M., Phys. Lett. **69A, 145**(1978).
201. Zaslavsky, G.M. and Kh.-R. Ya. Rachko, ZhETF **76,** 2052(1979).
202. Li, T.Y. and J.A. Yorke. Am. Math. Monthly **82,** 985(1975).
203. Kaplan, J.L. and J.A. Yorke, *Lecture Notes in Mathematics* (Springer, Berlin. 1979), Vol. 730, p. 228.
204. Russel, D.A., J.D. Hanson and E. Ott, Phys. Rev. Lett. **45,** 1175(1980).
205. Zaslavsky, G.M., Proceedings of 9th International Conference on Nonliear Oscillations (Kiev. 1981).
206. Landau, L.D., DAN SSSR **44,** 339(1944).
207. Contopoulos, G., Bull, Astron. C.N.R.S. **2,** 223(1967).
208. Berman, G.P. and Zaslavsky, G.M., Phys. Lett. **61A,** 295(1977).
209. Hadamard J.J. Math. Pure Appl. **4,** 27(1898).
210. M. Bouem "Method of Symbolic Dynamics" (Mir, Moscow 1979) in Russian.

索　引

た　行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

訳者あとがき

本書は G.W. Zaslavsky 著，“Chaos in dynamic systems”の全訳である．カオスについて書かれた本は数多くあるが，本書は特にその物理的側面を強調した数少ない著書である．本書においては古典力学系のみならず量子力学系も同等に扱われているため，日本語の題名は「力学系のカオス」とはせずにあえて本訳書のようにした．なお，原著書にみられた明らかな数式のミスは訳者らの気付いた範囲で著者に断らずに訂正した．

本翻訳を企画し，指導し，訳文の全てにわたり細部まで深く検討して下さった東京学芸大学教授，三島信彦氏は，1989年3月27日，本書の出版を待たずに53才の若さで急逝された．三島教授は初校についてはすでに十分に目を通されており，本書の出版を心待ちにされていたことから，我々の判断で本書を当初の計画どおり世に出すことにした．ここに謹んで三島教授の御冥福をお祈りする．

1989年5月

斉藤徹也　新藤茂

訳者略歴

三島信彦

1959年　東京教育大学卒業
1965年　東京都立大学大学院博士課程修了（理学博士）
1980年　東京学芸大学教授
1989年3月　没

主要著訳書　マイコン物理（共立出版）
積分方程式論（講談社）
量子力学における三体問題（講談社）
相対論と高エネルギー物理（共立出版）
微分方程式（マグロウヒル）

斉藤徹也

1961年　東京都立大学卒業
現在　創価大学教授
理学博士

新藤茂

1974年　早稲田大学卒業
現在　東京学芸大学講師
理学博士

カオス――古典および量子力学系――

1989年7月25日　初版発行　**定価 3,500円**

著者　G.M. ザスラフスキー

訳者　三島信彦　斉藤徹也　新藤茂

発行者　林勝平

発行所　**現代工学社**
東京都新宿区四谷 3-8
電話（03）357-7161

ISBN 4-87472-140-OC